积分方程

及其数值方法

魏培君 编著


冶金工业出版社
http://www.cnmip.com.cn





ISBN 978-7-5024-4337-5

定价 20.00 元

销售分类建议：数学

积分方程及其数值方法

魏培君　编著

北　京
冶　金　工　业　出　版　社
2007

内 容 简 介

本书系统介绍了积分方程的解析及数值方法基本理论，主要内容包括第Ⅰ类和第Ⅱ类的 Fredholm 以及 Volterra 型积分方程的解析方法和数值方法，其中涉及的积分核有连续核、平方可积核、对称核、卷积核等。与现有积分方程教材相比，本书在保证积分方程基本理论相对完整的基础上，增加了积分方程数值方法的篇幅，特别是增加了求解不适定的第Ⅰ类积分方程的正则化数值方法。此外，考虑到泛函分析与积分方程的密切关系，还增加了对泛函分析基本知识的介绍。出于篇幅的考虑，本书没有涉及 Cauchy 型奇异积分方程和非线性积分方程。本书适合作为高等院校数学、力学、物理以及工科相关专业大学本科和研究生学习“积分方程”课程的教学用书，也可供广大科技工作者和工程技术人员阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

积分方程及其数值方法/魏培君编著．—北京：冶金工业出版社，2007．8

ISBN 978-7-5024-4337-5

Ⅰ．积…　Ⅱ．魏…　Ⅲ．积分方程－数值计算　Ⅳ．0241．83

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 119553 号

出 版 人　曹胜利（北京沙滩嵩祝院北巷 39 号，邮编 100009）

责任编辑　程志宏　美术编辑　李　心　版面设计　张　青

责任校对　侯　瑂　李文彦　责任印制　丁小晶

ISBN 978-7-5024-4337-5

北京百善印刷厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销

2007 年 8 月第 1 版，2007 年 8 月第 1 次印刷

787mm×1092mm　1/16；9．75 印张；233 千字；147 页；1－3000 册

20．00 元

冶金工业出版社发行部　电话：(010)64044283　传真：(010)64027893

冶金书店　地址：北京东四西大街 46 号(100711)　电话：(010)65289081

（本社图书如有印装质量问题，本社发行部负责退换）

序

许多科学和工程问题的数学模型都可归结为积分方程，还有些问题的数学模型既可归结为微分方程也可归结为积分方程。事实上，积分方程与微分方程之间有密切的关系。一般情况下，微分方程与积分方程之间可以相互转化。微分方程和积分方程都是描述研究对象物理规律的数学形式。通常微分方程需附加初值条件或边值条件以形成定解条件。而积分方程本身已经包含了初值或边值信息。这种差别使得积分方程的求解方法与微分方程的求解方法有较大不同。特别是在求方程的数值解时，积分方程往往较微分方程更容易、更直接，而且随着计算机科学和技术的发展，数值计算的新方法也层出不穷。积分方程的各种数值方法都是建立在积分方程的基本理论基础之上的，因而在数值方法越来越得到重视的今天，传统的积分方程基本理论和解析方法依然是不可或缺的。

本书在保证积分方程基本理论相对完整的基础上，相对于其他教材增加了积分方程的数值方法的篇幅，以满足广大科技工作者和各领域工程师的需要。特别是增加了求解不适定的第Ⅰ类积分方程的正则化数值方法。此外，考虑到泛函分析与积分方程的密切关系，为方便读者阅读本书，在第2章对泛函分析基本知识作了简单介绍。出于篇幅的考虑，本书没有涉及 Cauchy 型奇异积分方程和非线性积分方程。

本书适合作为高等院校数学、力学、物理以及工科相关专业大学本科和研究生学习“积分方程”课程的教学用书。也可供广大科技工作者和工程技术人员阅读与参考。读者具备“高等数学”、“线性代数”、“微分方程”和“积分变换”等课程的知识，就可顺利阅读本教材。

本书是在作者多年教授“积分方程”课程的讲义基础上整理完成的。在编写的过程中，作者的研究生占正强、赵艳萍、郑敏在手稿的文字和数学公式录入以及计算机制图等方面做了大量的工作，对他们的辛勤劳动作者表示衷心的感谢。本书的出版得到国家自然科学基金项目(No. 10672019，No. 10272003)和北京科技大学引进人才基金的联合资助，作者在此一并表示感谢。由于积分方程的解析和数值方法内容覆盖范围很广，加之作者学术水平有限，书中难免有错误、疏漏和不妥之处，请各位同行和读者不吝指正。

作　者
2007年5月
于北京科技大学

目　录

1 积分方程引论

1.1 积分方程的来源

例 1 弹性弦问题。

设有一条柔软的弹性弦 AB 长为 l，两端点 $A(x=0)$ 和 $B(x=l)$ 固定在如图 1.1-1 所示的直角坐标系的横轴上，弹性弦所承受的分布载荷为 $p(x)$。在分布载荷的作用下，弹性弦发生挠曲，挠曲曲线用 $y(x)$ 表示。在对弹性弦问题做深入分析之前，先作如下假设：

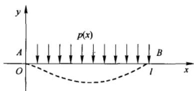


图 1.1-1 均布荷载下的弹性弦

(1) 假设弹性弦十分柔软，因而由于弯曲和扭转产生的力矩和扭矩均可忽略不计。这里只考虑由于弦的伸长而产生的弹性张力。

(2) 载荷相对于弹性弦的弹性模量是微小的，因而挠曲变形也是微小的。

(3) 在载荷作用下，弹性弦各处的张力近似相等。

考虑如下问题。

A 给定载荷分布 $p(x)$，求弹性弦的挠曲线 $y(x)$

首先考虑在弹性弦上的任意一点 $C(x=\xi)$ 处作用集中载荷时的挠曲曲线 $y(x)$。如图 1.1-2 所示，挠曲曲线是三角形，最大挠度即 CC' 发生在 $x=\xi$ 处。设最大挠度为 δ。由于假设条件(2)，挠度 δ 相对于 AC 和 CB 是微小的。故近似有：

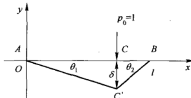


图 1.1.2 集中荷载下的弹性弦

$$\sin\theta_1 \approx \tan\theta_1 = \frac{\delta}{\xi}, \sin\theta_2 \approx \tan\theta_2 = \frac{\delta}{l-\xi} \tag{1.1-1}$$

式中，θ_1 和 θ_2 分别为 AC'，$C'B$ 与 x 轴的夹角。设弹性弦中的张力为 T_0，根据静力平衡条件，在 y 方向有：

$$T_0\sin\theta_1 + T_0\sin\theta_2 = P_0 \tag{1.1-2}$$

即

$$T_0\frac{\delta}{\xi} + T_0\frac{\delta}{l-\xi} = P_0 \tag{1.1-3}$$

所以

$$\delta = \frac{P_0(l-\xi)}{T_0 l}\xi \tag{1.1-4}$$

当 $0<x\leqslant\xi$ 时，有 $\frac{y}{x}=\frac{\delta}{\xi}$，即

$$y(x) = \frac{\delta}{\xi}x = \frac{P_0(l-\xi)}{T_0 l}x \tag{1.1-5a}$$

当 $\xi\leqslant x\leqslant l$ 时，有 $\frac{y}{l-x}=\frac{\delta}{l-\xi}$，即

$$y(x)=\frac{\delta}{l-\xi}(l-x)=\frac{P_0(l-x)}{T_0 l}\xi \tag{1.1-5b}$$

综合式(1.1-5a)和式(1.1-5b)得：

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{l-\xi}{T_0 l}x, 0\leqslant x\leqslant\xi\\ \frac{l-x}{T_0 l}\xi, \xi\leqslant x\leqslant l\end{cases} \tag{1.1-6}$$

上式中 $G(x,\xi)$ 的含义是在 $x=\xi$ 处作用单位载荷 $P_0=1$ 时，弹性弦的挠曲变形曲线。通常称之为格林函数。格林函数具有对称性，即

$$G(x,\xi)=G(\xi,x) \tag{1.1-7}$$

对于强度为 $p(x)$ 的连续分布载荷，作用于 $x=\xi$ 到 $x=\xi+\mathrm{d}\xi$ 这一微元上的力为 $P_0=p(\xi)\mathrm{d}\xi$，所产生的挠曲曲线为 $G(x,\xi)p(\xi)\mathrm{d}\xi$。在线性小变形的假设条件下，叠加原理成立，即在强度为 $p(x)$ 的连续分布载荷下，弹性弦的挠曲曲线为

$$y(x)=\int_0^l G(x,\xi)p(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{1.1-8}$$

B　给定挠曲曲线 $y(x)$，求产生这样的挠曲曲线的分布载荷

这个问题相当于给定式(1.1-8)中的 $y(x)$，求与之对应的未知函数 $p(x)$，解决这个问题就需要解决式(1.1-8)所示的积分方程。该种形式的积分方程通常称为第Ⅰ类 Fredholm 积分方程。

注意到问题 A 与问题 B 的已知与未知函数正好相反，前者是已知 $p(x)$ 求 $y(x)$，后者是已知 $y(x)$ 求 $p(x)$。通常称问题 A 为正问题，而称问题 B 为反问题。许多数学物理问题都可以归结为积分方程。

C　弹性弦的强迫振动问题

考虑作用于弹性弦上的载荷是随时间简谐变化的情况，即分布载荷的强度为 $p(\xi)\sin\omega t$（ω 为圆频率）。在此分布载荷作用下，弹性弦在平衡位置作微幅振动，此时弹性弦的挠曲曲线为 $y=y(x)\sin\omega t$。设弹性弦的质量密度为 $\rho(x)$，则在时刻 t，从点 $x=\xi$ 到 $x=\xi+\mathrm{d}\xi$ 这段弦同时受到外力 $p(\xi)\sin\omega t\mathrm{d}\xi$ 以及惯性力 $-\rho(\xi)\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\rho(\xi)y(\xi)\omega^2\sin\omega t\mathrm{d}\xi$ 的作用。相应地，式(1.1-8)应改为

$$y(x)\sin\omega t=\int_0^l G(x,\xi)[p(\xi)\sin\omega t+\rho(\xi)\omega^2 y(\xi)\sin\omega t]\mathrm{d}\xi \tag{1.1-9}$$

设 $\int_0^l G(x,\xi)p(\xi)\mathrm{d}\xi=f(x)$，$G(x,\xi)\rho(\xi)=k(x,\xi)$，化简后可以得到：

$$y(x)=\omega^2\int_0^l k(x,\xi)y(\xi)\mathrm{d}\xi+f(x) \tag{1.1-10}$$

当分布载荷强度 $p(x)$ 和质量密度 $\rho(x)$ 为已知时，即 $f(x)$ 和 $k(x,\xi)$ 是已知的，此时，求弹性弦挠曲曲线 $y(x)$ 的问题就归结为求解以 $y(x)$ 为未知函数的积分方程(1.1-10)。这种形式的方程通常称为第Ⅱ类 Fredholm 积分方程。

例 2　线性系统响应问题。

自然界中有许多现象其物理机理还不是十分的清楚，难以用现有的物理定理去分析。对于这一类问题，通常将其作为一个黑箱，通过研究其输入和输出的对应关系确定黑箱的物理性

质。现考虑一个简单的线性系统。如图 1.1-3 所示，当其输入为单位脉冲函数 $\delta(\tau)$ 时，即

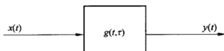


图 1.1-3　线性系统的激励和响应

$$\delta(\tau)=\begin{cases}\infty, t=\tau\\ 0, t\neq\tau\end{cases} \tag{1.1-11}$$

且 $\int_0^{\infty}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=1$，$\int_0^{\infty}y(t)\delta(t-\tau)\mathrm{d}t=y(\tau)$。设该系统的输出为 $g(t,\tau)$，表示在时刻 τ 作用于线性系统一个单位脉冲函数时，在时刻 t 线性系统的输出响应。即

$$g(t,\tau)=\int_0^{\infty}g(t,t')\delta(t'-\tau)\mathrm{d}t' \tag{1.1-12}$$

这样，如果已知系统输入，求系统输出响应时，则有

$$\begin{aligned}y(t)&=\int_0^t\int_0^{\infty}g(t,t')x(t')\delta(t'-\tau)\mathrm{d}t'\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^t g(t,\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{1.1-13}$$

当要求从已知输出信号求输入信号时，就要求解形如式(1.1-13)的积分方程。该形式积分方程的积分限不只含有常数还含有变量，属于不定积分，通常称为第Ⅰ类 Volterra 积分方程。

例 3　人口增长问题。

当研究一个国家的人口增长问题时，由于人口基数很大，且在任意时刻都有人出生，也有人死亡，故可以将人口数看成是时间的连续函数。设在时刻 t_0 时人口总数为 n_0，$f(t,\tau)$ 表示 τ 时刻出生的人直到 t 时刻仍存活的人数占 τ 时刻出生人数的比例，通常称 $f(t,\tau)$ 为生存函数。又设 $r(t)$ 表示婴儿的出生率，则在时刻 t 的人口总数为

$$n(t)=n_0+\int_{t_0}^{t}f(t,\tau)r(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.1-14}$$

人口出生率 $r(t)$ 与众多社会因素有关。这里简单假设仅与时刻 t 的人口总数成正比，即

$$r(t)=kn(t) \tag{1.1-15}$$

式中，k 为比例系数。将式(1.1-15)代入式(1.1-14)得

$$n(t)-k\int_{t_0}^{t}f(t,\tau)n(t)\mathrm{d}\tau=n_0 \tag{1.1-16}$$

生存函数 $f(t,\tau)$ 与自然环境、生活水平和医疗卫生条件等因素有关。当生存函数确定后，求人口总数 $n(t)$ 就要求解形如式(1.1-16)的积分方程。通常称之为第Ⅱ类 Volterra 积分方程。

例 4　等时曲线问题(Tantochrone Problem)。

等时曲线问题又称为 Abel 问题。考虑一质点在重力作用下，沿 xOy 平面上的一条光滑的曲线 l 从静止开始无摩擦地从高度 h 滑动到 x 坐标轴上的某点，如图 1.1-4 所

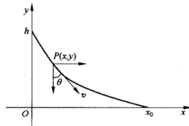


图 1.1-4　等时曲线问题

示。设质点滑动到 x 轴上某点所经历的时间为 $T_0(h)$，是高度 h 的函数。当 $T_0(h)$ 给定时，试确定此曲线 l 的形状。

设质点的质量为 m，重力加速度为 g，根据机械能转换守恒定律可知，质点位于高度 h 时，动能为零，势能为 mgh。当滑落到 l 上某点 $P(x,y)$ 处时，动能为 $\frac{1}{2}mv^2$，势能减为 mgy。故有

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h-y) \tag{1.1-17}$$

即

$$v = \sqrt{2g(h-y(x))} \tag{1.1-18}$$

式中，v 为质点的运动速度，它是一个矢量，其方向为曲线 l 在点 $P(x,y)$ 处的切线方向。如图 1.1-4 所示。设角度 $\theta(y)$ 为速度矢量与负 y 轴的夹角，则速度矢量在负 y 轴方向的分量为：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{2g(h-y)}\cos\theta \tag{1.1-19}$$

即

$$\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{2g(h-y)}} \cdot \frac{1}{\cos\theta(y)}\mathrm{d}y \tag{1.1-20}$$

设 $\varphi(y) = \frac{1}{\cos\theta(y)}$，$T(h) = -\sqrt{2g}T_0(h)$，并将上式两边从 0 到 h 积分可得：

$$\int_0^h \frac{\varphi(y)}{\sqrt{h-y}}\mathrm{d}y = T(h) \tag{1.1-21}$$

当给定高度 h 及相应的滑动时间 $T(h)$ 时，求曲线的形状就需要求解形如(1.1-21)的积分方程。

式(1.1-21)通常称为 Abel 方程，是一种特殊的第 Ⅰ 类 Volterra 积分方程，也是历史上最早提出的积分方程之一。它的一般形式可以写成：

$$f(x) = \int_0^x (x-t)^{-\alpha}\varphi(t)\mathrm{d}t, \quad (0<\alpha<1) \tag{1.1-22}$$

1.2 积分方程的概念与分类

1.2.1 积分方程的基本概念

一般地说，在积分号内出现未知函数的方程就称为积分方程。例如，下面的方程都是积分方程。

$$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{1.2-1}$$

$$\varphi(t) + \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{1.2-2}$$

$$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{1.2-3}$$

$$\varphi(t) + \lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{1.2-4}$$

$$\int_a^b k(x,t,\varphi(t))\mathrm{d}t = f(x) \tag{1.2-5}$$

$$\int_a^b k(x,t)F(t,\varphi(t))\mathrm{d}t = f(x) \tag{1.2-6}$$

$$\varphi(t) + \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}\mathrm{d}t = f(x),(\alpha>0) \tag{1.2-7}$$

$$\varphi(t) + \lambda\int_a^\infty k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{1.2-8}$$

$$\varphi(t) + \lambda\int_{-\infty}^\infty k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{1.2-9}$$

在上述方程中，$k(x,t)$和 $f(x)$为已知函数，$\varphi(t)$为未知函数，a,b,λ 为常数。通常称 $k(x,t)$为积分方程的核，它确定了积分方程的性质。$f(x)$称为方程的自由项。λ 称为积分方程的参数。积分方程可能仅对某些 λ 值有解，也可能根本无解。

1.2.2 积分方程的分类

(1) 按线性性质分可分为线性积分方程和非线性积分方程两大类。例如，式(1.2-1)、式(1.2-2)、式(1.2-3)、式(1.2-4)，由于其被积函数关于未知函数 $\varphi(t)$是线性的，故称为线性积分方程。又如，式(1.2-5)和式(1.2-6)，当积分核 $k(x,t,\varphi(t))$是关于 $\varphi(t)$的非线性泛函或 $F(t,\varphi(t))$是关于 $\varphi(t)$的非线性泛函，则称方程式(1.2-5)和式(1.2-6)是非线性积分方程。

(2) 按积分限可以分成弗雷德霍姆(Fredholm)型和沃尔泰拉(Volterra)型积分方程以及奇异积分方程。对于线性积分方程，若积分限均为常数，则通常称为 Fredholm 方程，例如：式(1.2-1)、式(1.2-2)。若积分限不全为常数，通常称为 Volterra 积分方程，例如：式(1.2-3)、式(1.2-4)。若积分限含有∞，例如：式(1.2-8)、式(1.2-9)，则称为奇异积分方程。

(3) 按积分号外是否含有未知函数可以分为第Ⅰ类和第Ⅱ类积分方程。例如：式(1.2-1)、式(1.2-3)积分号外不含有未知函数，则方程称为第Ⅰ类 Fredholm 积分方程和第Ⅰ类 Volterra 积分方程。在式(1.2-2)、式(1.2-4)中，未知函数不仅出现在积分号内，也出现在积分号外，则分别称为第Ⅱ类 Fredholm 积分方程和第Ⅱ类 Volterra 积分方程。

(4) 按积分核的性质可以分为奇性(singular)和非奇性(non singular)积分方程。一般对于形如式(1.2-2)的积分方程，若积分核 $k(x,t)$是(x,t)的连续函数或者 $k(x,t)$在区域 $a\leqslant x,t\leqslant b$，虽然不连续，但却平方可积，即满足

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant A,\quad (A\ 为有限常数)$$

则称核 $k(x,t)$为非奇性核或者 Fredholm 核，相应的积分方程称为非奇异积分方程，或者称为 Fredholm 积分方程。

当积分核 $k(x,t)$具有如下形式

$$k(x,t) = \frac{h(x,t)}{|x-t|^\alpha},\quad (0<\alpha<1) \tag{1.2-10}$$

式中，$h(x,t)$为区域 $a\leqslant x,t\leqslant b$ 的连续函数，此时，称积分核 $k(x,t)$为弱奇性核(weak singularity kernel)，相应的积分方程称为弱奇性积分方程。由于弱奇性核的积分方程与非奇

性核的积分方程性质相似，有时也称弱奇性核的积分方程为拟 Fredholm 积分方程。在弱奇性核中，有一类特殊的核称为平方可积核。即积分核 $k(x,t)$在 $a\leqslant x,t\leqslant b$ 上虽不连续，但却是平方可积的，即满足

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \infty$$

$$\int_a^b |k(x,t)|^2 \mathrm{d}t < \infty, \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

$$\int_a^b |k(x,t)|^2 \mathrm{d}x < \infty, \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

例如，积分核

$$k(x,t)=\begin{cases}\dfrac{F(x,t)}{(x-t)^{\alpha}}, & (x\geqslant t)\\ 0, & (x<t)\end{cases}$$

式中，$F(x,t)$是区域 $a\leqslant x,t\leqslant b$ 上的连续函数，即$|F(x,t)|\leqslant M$(有限常数)

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x \frac{(F(x,t))^2}{(x-t)^{2\alpha}}\mathrm{d}t \leqslant M^2\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x (x-t)^{-2\alpha}\mathrm{d}t\\ &= \frac{M^2}{1-2\alpha}\int_a^b (x-a)^{1-2\alpha}\mathrm{d}x\\ &= \frac{M^2(b-a)^{2-2\alpha}}{2(1-2\alpha)(1-\alpha)}\end{aligned}$$

当 $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$时，核 $k(x,t)$是平方可积的。

连续核与平方可积核对应的积分方程具有离散的谱(discrete spectrum)，即特征值是有限个，或者无限可列个，且每个特征值的秩(rank or index)是有限的，即每个特征值对应有限个线性无关特征函数。连续核与平方可积核积分方程的这种性质成为区分 Fredholm 积分方程和非 Fredholm 积分方程的依据。例如，积分区间含∞的积分方程，或者具有连续谱，或者特征值的秩为无穷，通常归入奇异积分方程。

当积分核具有如下形式：

$$k(x,t)=\frac{h(x,t)}{x-t} \tag{1.2-11}$$

此时，积分

$$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_a^b \frac{h(x,t)}{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{1.2-12}$$

通常呈发散的，但如果对 $h(x,t)$ 和 $\varphi(t)$ 附加一些限制条件，可保证

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{x-\varepsilon} k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_{x+\varepsilon}^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right]\leqslant A(\text{有限常数}) \tag{1.2-13}$$

即在 Cauchy 主值积分意义下存在，故称积分核为 Cauchy 奇性核，相应的积分方程称为 Cauchy 奇性积分方程。

当积分核具有如下形式：

$$k(x,t)=\frac{h(x,t)}{|x-t|^{\alpha}},(\alpha>1) \tag{1.2-14}$$

此时积分$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$ 即使在 Cauchy 主值积分意义下也不存在，通常称为超奇性

积分。为了使超奇性积分$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$有意义，可以将导致积分发散的项分离并删去，将剩余部分定义为积分的值，这就是超奇异积分的“有限部积分”。在引入超奇异积分“有限部积分”的概念后，相应的积分方程称为超奇异积分方程。

在式(1.2-7)中，根据α的不同取值，方程可为弱奇性积分方程($0<\alpha<1$)，Cauchy 奇异积分方程($\alpha=1$)和超奇异积分方程($\alpha>1$)。

(5) 按自由项$f(x)$是否为0可分成齐次(homogeneous)和非齐次(imhomogeneous)积分方程。当$f(x)=0$时称相应的积分方程为齐次积分方程；当$f(x)\neq 0$时称相应的积分方程为非齐次积分方程。对于一个非齐次积分方程，人为地取自由项为0，就得到一个与原非齐次方程伴随的齐次积分方程。非齐次积分方程的解与其相伴齐次积分方程的解有紧密的联系。

由于积分方程形式的多样性，上述分类并不能包罗所有形式的积分方程。除上述提到的各种类型的积分方程外，还会经常遇到下列几类积分方程。

(6) 卷积型积分方程(Convolution I. E)。卷积型积分方程的核具有如下性质：

$$k(x,t)=k(x-t) \tag{1.2-15}$$

(7) 对称核积分方程(Symmetric kernels I. E)。对称核积分方程的核具有如下性质：

$$k(x,t)=k(t,x) \tag{1.2-16}$$

除实对称核外，在复数范围内，若积分核的共轭满足

$$\overline{k(x,t)}=k(t,x) \tag{1.2-17}$$

则称为 Hermitian 核积分方程。

(8) 退化核积分方程(Degenerate kernels I. E)。退化核可以表示成有限项之和，其中每一项都是两个因子的乘积，一个因子仅依赖于x，另一个因子仅依赖于t，即

$$k(x,t)=\sum_{i=1}^{N} a_i(x)b_i(t) \tag{1.2-18}$$

可分离核(seperable kernels)可看成是退化核的一个特殊情况，即$k(x,t)=a(x)b(t)$。具有退化核的积分方程一般都可求得封闭解析解(closed analytical solution)。

(9) Wiener-Hopf 型积分方程。其积分核和积分区间具有如下形式：

$$\int_0^{\infty} k(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(s),(0\leqslant x<\infty) \tag{1.2-19a}$$

$$\varphi(x)+\lambda\int_0^{\infty} k(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x),(0\leqslant x<\infty) \tag{1.2-19b}$$

上述方程分别称为第Ⅰ类和第Ⅱ类 Wiener-Hopf 型积分方程。

(10) 积分-微分方程。未知函数不仅出现在积分号内，也以微分形式出现在方程中。例如

$$y^{(n)}(x)=C_n+\int_0^x F(t,y(t),y'(x),\cdots,y^{(n)}(t))\mathrm{d}t \tag{1.2-20}$$

以上，从不同的角度对积分方程进行了分类，但也应该注意到不同类型的积分方程之间，有时也存在相互联系。如 Fredholm 积分方程与 Volterra 积分方程之间，第Ⅰ类和第Ⅱ类 Volterra 积分方程之间，都存在某种联系，在特定条件下还可以相互转化，例如，当$t>x$时，积分核$k(x,t)=0$，则 Fredholm 型积分方程

$$\phi(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)\phi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{1.2-21}$$

就转化成 Volterra 型积分方程

$$\phi(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)\phi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{1.2-22}$$

对于第Ⅰ类 Volterra 型积分方程

$$\int_a^x k(x,t)\phi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{1.2-23}$$

两边对 x 求导得

$$k(x,x)\phi(x)+\int_a^x \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\phi(t)\mathrm{d}t=f'(x) \tag{1.2-24}$$

化简后得到第Ⅱ类 Volterra 型积分方程

$$\phi(x)+\frac{1}{k(x,x)}\int_a^x \frac{\partial}{\partial x}k(x,t)\phi(t)\mathrm{d}t=\frac{f'(x)}{k(x,x)} \tag{1.2-25}$$

1.3 积分方程与微分方程的关系

微分方程初值问题,通常可化为第Ⅱ类 Volterra 积分方程;而微分方程的边值问题,一般地可化为第Ⅱ类 Fredholm 积分方程。

1.3.1 一阶常微分方程初值问题

对方程

$$\begin{cases} y'(x)=f(x,y) \\ y(0)=c_0 \end{cases} \tag{1.3-1}$$

两边求不定积分立刻得到

$$y(x)=c_0+\int_0^x f(t,y(t))\mathrm{d}t \tag{1.3-2}$$

这就是与微分方程(1.3-1)相对应的积分方程,它是第Ⅱ类 Volterra 型积分方程。当 $f(x,y)$ 关于 y 呈线性时,该 Volterra 积分方程是线性的,当 $f(x,y)$ 关于 y 是非线性的时,该 Volterra 积分方程是非线性的。

1.3.2 二阶常微分方程

对于方程
$$\begin{cases} y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)=F(x) \\ y(0)=c_0,\ y'(0)=c_1 \end{cases} \tag{1.3-3}$$

设
$$y''(x)=\varphi(x) \tag{1.3-4}$$

则两端对 x 积分并利用初始条件 $y'(0)=c_1$ 可得

$$y'(x)=\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t+c_1 \tag{1.3-5}$$

再对两端继续关于 x 积分,并利用初始条件 $y(0)=c_0$ 得

$$y(x)=\int_0^x\left[\int_0^u \varphi(t)\mathrm{d}t+c_1\right]\mathrm{d}u+c_0=\int_0^x\left[\int_0^u \varphi(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u+c_1x+c_0 \tag{1.3-6}$$

上式右端第一项的积分区域如图 1.3-1 中阴影部分所示。交换积分次序后,可得:

$$y(x)=\int_0^x\left[\int_t^x \varphi(t)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t+c_1x+c_0$$

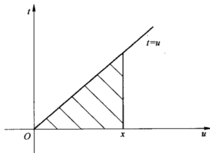


图 1.3-1 交换积分次序的示意图

$$= \int_0^x (x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t + c_1 x + c_0 \tag{1.3-7}$$

将式(1.3-4),式(1.3-5)和式(1.3-7)代入式(1.3-3)化简后得:

$$\varphi(x) + \int_0^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{1.3-8}$$

式中 $k(x,t) = a_1(x) + a_2(x)(x-t)$;

$f(x) = F(x) - c_1 a_1(x) - c_1 x a_2(x) - c_0 a_2(x)$。

方程(1.3-8)是第Ⅱ类 Volterra 型积分方程。求解该积分方程得到 $\varphi(x)$后,代入式(1.3-7)就得原微分方程(1.3-3)的解 $y(x)$。

对于 n 阶微分方程的初值问题,利用公式

$$\int_0^x \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}x \cdots \int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-u)^{n-1} f(u)\mathrm{d}u \tag{1.3-9}$$

亦可化为等价的第Ⅱ类 Volterra 积分方程。

1.3.3 *n* 阶线性常系数微分方程初值问题

对于方程

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n y(x) = F(x) \\ y(0) = c_0, y'(0) = c_1, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \end{cases} \tag{1.3-10}$$

设

$$y^{(n)}(x) = \varphi(x) \tag{1.3-11}$$

则

$$y^{(n-1)}(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t + c_{n-1} \tag{1.3-12}$$

$$\begin{aligned} y^{(n-2)}(x) &= \int_0^x \left[\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x + c_{n-1}x + c_{n-2} \\ &= \int_0^x (x-u)\varphi(u)\mathrm{d}u + c_{n-1}x + c_{n-2} \end{aligned} \tag{1.3-13}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}x \cdots \int_0^x \varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{c_{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_{n-2}x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + c_1 x + c_0 \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-u)^{n-1}\varphi(u)\mathrm{d}u + \frac{c_{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_{n-2}x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + c_1 x + c_0 \end{aligned} \tag{1.3-14}$$

将式(1.3-11)～式(1.3-14)代入式(1.3-10)并化简得:

$$\varphi(x)+\int_0^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{1.3-15}$$

式中 $k(x,t)=\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$

$$f(x)=F(x)-a_1c_{n-1}-a_2(c_{n-1}x+c_{n-2})-\cdots$$
$$-a_n\left[c_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+c_{n-2}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+c_1x+c_0\right] \tag{1.3-16}$$

1.3.4 二阶常微分方程边值问题

$$\begin{cases} y''(x)+\lambda y(x)=f(x) \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases} \tag{1.3-17}$$

设
$$y''(x)=\varphi(x) \tag{1.3-18}$$

则
$$y'(x)=\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t+c_1 \tag{1.3-19}$$

$$\begin{aligned} y(x)&=\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^u \varphi(t)\mathrm{d}t+c_1x+c_2 \\ &=\int_0^x (x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t+c_1x+c_2 \end{aligned} \tag{1.3-20}$$

利用边值条件知：

$$c_1=-\int_0^1 (1-t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{1.3-21a}$$

$$c_2=0 \tag{1.3-21b}$$

代入式(1.3-20)得

$$\begin{aligned} y(x)&=\int_0^x (x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 x(1-t)\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &=\int_0^x (x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_0^x x(1-t)\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_x^1 x(1-t)\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &=\int_0^x t(x-1)\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_x^1 x(t-1)\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &=\int_0^1 G(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{1.3-22}$$

式中
$$G(x,t)=\begin{cases} t(x-1), 0\leqslant t\leqslant x \\ x(t-1), x\leqslant t\leqslant 1 \end{cases} \tag{1.3-23}$$

将式(1.3-18)～式(1.3-22)代入式(1.3-17)，化简后得

$$\varphi(x)+\lambda\int_0^1 G(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{1.3-24}$$

这是第Ⅱ类 Fredholm 积分方程。

1.3.5 一般形式二阶线性微分方程的初值问题

考虑如下形式二阶线性微分方程

$$Ly(x)=F(x), (0\leqslant x\leqslant l) \tag{1.3-25}$$

式中，L 是微分算子，由下式给定

$$L=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\}+q(x) \tag{1.3-26}$$

对于初值问题，一般给定 $y(0)$ 和 $y'(0)$，下面推导与该微分方程等价且包含初值条件的积分方程。

令
$$\phi(x)=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} \tag{1.3-27}$$

则
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'(0)+\int_0^x\phi(s)\mathrm{d}s \tag{1.3-28}$$

$$\begin{aligned}y(x)&=y(0)+xy'(0)+\int_0^x\left[\int_0^x\phi(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}x\\&=y(0)+xy'(0)+\int_0^x\left[\int_s^x\phi(s)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}s\\&=y(0)+xy'(0)+\int_0^x(x-s)\phi(s)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{1.3-29}$$

将式(1.3-27)～式(1.3-29)代入式(1.3-25)，化简后得

$$\phi(x)+\int_0^x k(x,s)\phi(s)\mathrm{d}s=f(x) \tag{1.3-30}$$

式中 $f(x)=\dfrac{1}{p(x)}[F(x)-y'(0)p'(x)-y(0)q(x)-xq(x)y'(0)]$；

$k(x,s)=\dfrac{1}{p(x)}[p'(x)+(x-s)q(x)]$。

这是第Ⅱ类 Volterra 积分方程。

1.3.6 一般形式二阶线性微分方程的边值问题

考虑下列形式微分方程边值问题

$$\begin{cases}Ly(x)=F(x,y),(0<x<l)\\\alpha y(0)+\beta y'(0)=0\\\alpha y(l)+\beta y'(l)=0\end{cases} \tag{1.3-31}$$

式中，L 是形式如式(1.3-26)的微分算子。端点条件亦采用最一般形式，α,β 为给定常数。下面推导与其等价的积分方程。

引入两个线性独立的辅助函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，满足齐次微分方程

$$Ly_i(x)=0,(i=1,2) \tag{1.3-32}$$

并分别满足式(1.3-31)中的端点 $x=0$ 和端点 $x=l$ 处的边界条件。一般地，与式(1.3-31)等价的积分方程是

$$y(x)=\int_0^l G(x,s)F(s,y(s))\mathrm{d}s \tag{1.3-33}$$

式中

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}y_1(x)y_2(s), & x\leqslant s\\\dfrac{1}{A}y_2(x)y_1(s), & x\geqslant s\end{cases} \tag{1.3-34}$$

通常被称为问题的格林函数(Green's function)，其中，A 为确定常数。下面说明如何确定常数 A，从而间接说明了等价性。

因为方程(1.3-33)与式(1.3-31)等价,所以方程(1.3-33)包含式(1.3-31)的所有解。对方程(1.3-33)两边作用微分算子 L 得:

$$Ly(x)=\int_0^l [LG(x,s)]F(s)\mathrm{d}s \tag{1.3-35}$$

$$F(x)=\int_0^l [LG(x,s)]F(s)\mathrm{d}s \tag{1.3-36}$$

上式若成立,必须满足

$$LG(x,s)=\delta(x-s) \tag{1.3-37}$$

式中,$\delta(x-s)$为 Dirac delta 函数。

根据 δ 函数的性质,从而有

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon}[LG(x,s)]\mathrm{d}x=1 \tag{1.3-38}$$

即

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{\partial}{\partial x}G(x,s)\right]_{s-\epsilon}^{s+\epsilon}=\frac{1}{p(s)} \tag{1.3-39}$$

将式(1.3-34)代入上式得:

$$y_1(s)y'_2(s)-y'_1(s)y_2(s)=\frac{A}{p(s)} \tag{1.3-40}$$

即

$$A=p(s)\cdot\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y'_1(s) & y'_2(s)\end{vmatrix} \tag{1.3-41}$$

例 5 $L=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(0\leqslant x\leqslant l)$,端点条件为 $y(0)=y(l)=0$。此时,$p(x)=1,q(x)=0$,两个辅助函数可由

$$y(x)=c_1x+c_2 \tag{1.3-42}$$

分别满足边界条件(a)$y(0)=0$ 和(b)$y(l)=0$ 定出,即

$$y_1(x)=x \tag{1.3-43a}$$

$$y_2(x)=l-x \tag{1.3-43b}$$

由式(1.3-41)确定系数

$$A=\begin{vmatrix} s & l-s \\ 1 & -1\end{vmatrix}=l \tag{1.3-44}$$

最后得到格林函数

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{x(l-s)}{l}, x\leqslant s \\[2mm] \dfrac{s(l-x)}{l}, x>s\end{cases} \tag{1.3-45}$$

前面讲了如何将微分方程转化为积分方程,事实上,某些积分方程也可能转化为微分方程,如 Volterra 积分方程和具有对称核的 Fredholm 积分方程。

例 6 将积分方程

$$\int_0^x \phi(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{n}x\phi(x)$$

化成微分方程。

解:两边微分得

$$\phi(x)=\frac{1}{n}[\phi(x)+x\phi'(x)]$$

$$\phi'(x)=\frac{n-1}{x}\phi(x)$$

例 7 将积分方程。

化成微分方程

$$\phi(x)-\int_0^x \phi(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x$$

解:两边微分得:

$$\phi'(x)-\phi(x)=\mathrm{e}^x$$

对应的初始条件,可由原方程观察得到

$$\phi(0)=1$$

即原积分方程等价于

$$\begin{cases}\phi'(x)-\phi(x)=\mathrm{e}^x\\ \phi(0)=1\end{cases}$$

例 8 将积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^\pi k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0$$

化成微分方程。

式中

$$k(x,t)=\begin{cases}\cos x\sin t,(0\leqslant x\leqslant t)\\ \cos t\sin x,(t<x\leqslant\pi)\end{cases}$$

解:

$$\varphi(x)=\lambda\sin x\int_0^x\cos t\varphi(t)\mathrm{d}t+\lambda\cos x\int_x^\pi\sin t\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$\varphi'(x)=\lambda\cos x\int_0^x\cos t\varphi(t)\mathrm{d}t+\lambda\sin x\cos x\varphi(x)-\lambda\sin x\int_x^\pi\sin t\varphi(t)\mathrm{d}t-\lambda\cos x\sin x\varphi(x)$$

$$=\lambda\cos x\int_0^x\cos t\varphi(t)\mathrm{d}t-\lambda\sin x\int_x^\pi\sin t\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$\varphi''(x)=-\lambda\sin x\int_0^x\cos t\varphi(t)\mathrm{d}t+\lambda\cos x\cos x\varphi(x)-\lambda\cos x\int_x^\pi\sin t\varphi(t)\mathrm{d}t+\lambda\sin x\sin x\varphi(x)$$

$$=\lambda\varphi(x)-\lambda\left[\sin x\int_0^x\cos t\varphi(t)\mathrm{d}t+\cos x\int_x^\pi\sin t\varphi(t)\mathrm{d}t\right]=(\lambda-1)\varphi(x)$$

由观察法得:$\varphi(\pi)=0,\varphi'(0)=0$。

故原积分方程等价于

$$\begin{cases}\varphi''(x)-(\lambda-1)\varphi(x)=0\\ \varphi(\pi)=0,\varphi'(0)=0\end{cases}$$

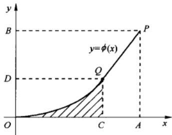
一般地,将微分方程化成积分方程时,要用到微分方程的初始条件或边界条件,即积分方程本身包含了初值条件和边界条件的信息。将积分方程化成微分方程时,将会失去初值条件或边界条件的信息,因此,应注意补充初值条件或边界条件。换句话说,一个物理问题既可以用微分方程描述,也可以用积分方程描述,用微分方程描述时,初值条件或边界条件是单独给出的,而用积分方程描述时,初值条件或边界条件已隐含在积分方程中。这就是积分方程与微分方程的本质区别。

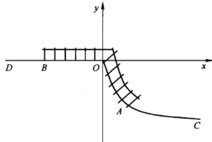
习　题

1. 确定连接如图所示矩形 $OAPB$ 对角顶点 O 和 P 两点的曲线 $y=\phi(x)$，使过曲线上任何一点 Q 作垂直线交于 x 轴的 C 点所围成的几何图形 OCQ 的面积正好是对应矩形 $OCQD$ 面积的 $\frac{1}{n}$。

提示：$\int_0^x \phi(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{n}x\phi(x)$ 转换成微分方程：$\phi'(x)=\frac{n-1}{x}\phi(x)$，解为 $\phi(x)=Ax^{n-1}$

2. 一条长为 a 的柔软链条从如图所示曲面无摩擦滑下。链条的质量密度设为 $\rho(s)$，链条位于曲面上的初始长度设为 σ_0，初始速度设为 v_0，求任意时刻 t 位于曲面上链条的长度 $\sigma(t)$。





3. 把下列微分方程定解问题化成积分方程。

(1) $\begin{cases} y''+(1+x^2)y=\cos x \\ y(0)=0, y'(0)=2 \end{cases}$

答案：$y(x)=1+2x-\cos x-\int_0^x (1+t^2)(x-t)y(t)\mathrm{d}t$

(2) $\begin{cases} y''+y=\cos x \\ y(0)=0, y'(0)=0 \end{cases}$

答案：$y(x)=1-\cos x-\int_0^x (x-t)y(t)\mathrm{d}t$

(3) $\begin{cases} y''+y=0 \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$

答案：$y(x)=x-\int_0^x (x-t)y(t)\mathrm{d}t$

(4) $\begin{cases} y''-5y'+6y=0 \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$

答案：$y(x)=x+\int_0^x [5-6(x-t)]y(t)\mathrm{d}t$

(5) $\begin{cases} y''+4y=f(x), (0<x<\pi/2) \\ y(0)=0, y(\pi/2)=0 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \phi''+\omega^2\phi=F[x,\phi(x)], (0<x<l) \\ \phi(0)=\phi(l)=0 \end{cases}$

答案：$\phi(x)=\int_0^l G(x,s)F[s,\phi(s)]\mathrm{d}s$；

$$G(x,s)=\begin{cases} -(\omega\sin\omega l)^{-1}\sin\omega x\sin\omega(l-s), x\leqslant s \\ -(\omega\sin\omega l)^{-1}\sin\omega(l-x)\sin\omega s, x>s \end{cases}$$

4. 把下列积分方程化成微分方程并求解。

(1) $\varphi(x)=x-\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t$　　答案：$\varphi(x)=x-\frac{x^2}{2}$

(2) $\int_0^x \mathrm{e}^{x+t}\varphi(t)\mathrm{d}t=x$　　答案：$\varphi(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-2x}$

(3) $\varphi(x)=\lambda\int_0^\pi k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$，

其中 $k(x,t)=\begin{cases}\cos x\sin t, 0\leqslant x\leqslant t\\ \cos t\sin x, t<x\leqslant\pi\end{cases}$

(4) $\phi(x)=1+2\int_0^x s\phi(s)\mathrm{d}s$

(5) $x\phi(x)=x^n+\int_0^x \phi(s)\mathrm{d}s$

(6) $\phi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x (x-s)\phi(s)\mathrm{d}s$

(a) $f(x)=1$；(b) $f(x)=x, \lambda=\pm 1$

(7) $\phi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x \sin(x-s)\phi(s)\mathrm{d}s$

(a) $f(x)=x, \lambda=1$；(b) $f(x)=\mathrm{e}^{-x}, \lambda=2$

2 Hilbert 空间与线性算子

2.1 度量空间

集合是最原始的数学概念之一，一般地说，在一定范围内的个体事物的全体被看作一个整体时，称这个整体为一个集合，其中每个个体事物叫做该集合的元素，下面举出几个集合的例子。

例 1　4,7,8,3 四个自然数构成的集合。

例 2　全体自然数。

例 3　0 与 1 之间的实数全体。

例 4　平面上的向量全体。

集合可以通过列举其元素来定义，记为

$$A=\{a,b,c,\cdots\}$$

也可以通过该集合中各元素必须满足的条件 P 来定义，记为

$$A=\{x \mid x\text{ 满足条件 }P\}$$

集合中的元素之间存在着某种关系，也就是说集合内部有一种结构。例如，对于全体实数组成的集合，我们不仅关心一个个的实数，而且关心它们的大小和它们之间距离以及研究实数间的运算。距离就是一种结构。有了两点之间的距离就可以定义区间和领域，进一步研究极限，连续，可导等问题。习惯上，把集合中元素间有某种关系或某种结构的集合叫做空间。其中距离的概念如下。

设 X 是一个集合，若对于 X 中任意两个元素 x,y，都有唯一确定实数 $d(x,y)$ 与之对应。而且这一对应关系满足下列条件：

(1)$d(x,y)\geqslant 0$，$d(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$；

(2)$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$，对于任意 z 都成立，

则 $d(x,y)$ 称为 x,y 之间的距离。

定义了距离 $d(x,y)$ 的非空集合 X 称为度量空间或距离空间，一般记作 (X,d)。如果 (X,d) 是度量空间，Y 是 X 的一个非空子集，则 (Y,d) 也是一个度量空间，称为 (X,d) 的子空间。下面给出度量空间的几个例子。

例 5　设二维空间中任意两点

$$x=(\xi_1,\xi_2);y=(\eta_1,\eta_2)$$

规定距离

$$d(x,y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2} \tag{2.1-1}$$

容易验证 $d(x,y)$ 满足距离的条件，一般地称这样规定的 $d(x,y)$ 为欧几里得距离，而称规定了距离的二维空间为二维欧氏空间，记作 $(\mathbb{R}^2,d)$。类似地三维欧氏空间，记作 $(\mathbb{R}^3,d)$，而 n 维欧式空间，记作 $(\mathbb{R}^n,d)$。需要指明的是，距离可以有各种不同形式，如在 $\mathbb{R}^n$ 中除了

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.1-2}$$

还可以有

$$d_1(x,y)=\max_i|\xi_i-\eta_i| \tag{2.1-3}$$

$$d_2(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i| \tag{2.1-4}$$

容易验证，$d_1(x,y)$和$d_2(x,y)$也满足距离的条件。

例 6 离散度量空间。

设 X 是任意非空集合，对 X 中任意两点 $x,y\in X$，令

$$d(x,y)=\begin{cases}1, x\neq y\\0, x=y\end{cases} \tag{2.1-5}$$

容易验证 $d(x,y)$满足距离的条件，称(X,d)为离散度量空间。

例 7 数列空间 l^∞。

令 l^∞ 表示实数列或复数列的全体，对 l^∞ 中任意两点

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots);y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$$

规定

$$d(x,y)=\sup_i|\xi_i-\eta_i| \tag{2.1-6}$$

易证 l^∞ 按 $d(x,y)$成为度量空间。

例 8 有界函数空间。

设 A 是一给定集合，令 $B(A)$表示 A 上有界函数的全体。对 $B(A)$中任意两点 x,y，规定

$$d(x,y)=\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)| \tag{2.1-7}$$

易证 $B(A)$按 $d(x,y)$成为度量空间。

例 9 连续函数空间 $C[a,b]$。

令 $C[a,b]$表示定义于闭区间$[a,b]$上连续函数全体，对 $C[a,b]$中任意两点x,y，规定

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \tag{2.1-8}$$

易证 $C[a,b]$按 $d(x,y)$成为度量空间。

设 $X=(X,d)$是度量空间，$\{x_n\}$是 X 中的点列，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，使得对任意 $n,m>N(\varepsilon)$，都有 $d(x_n,x_m)<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$是 X 中的柯西点列，如果度量空间(X,d)中的每一个柯西点列都在(X,d)中收敛，那么称(X,d)是完备的度量空间。

2.2 线性空间

对于集合中的元素不仅可以定义距离的概念，还可以对不同元素进行加法与数乘的代数运算。设 X 是一非空集合，在 X 中定义元素的加法和数乘运算如下：

(1) 对任意 x,y，存在 $u\in X$ 与之对应，记作 $u=x+y$，称为 x 与 y 的和，并满足

1) $x+y=y+x$；

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$；

3) 在 X 中存在唯一元素 θ，使对任意 $x\in X$，有 $x+\theta=x$，称 θ 为 X 的零元素；

4) 对 X 中任意元素 $x\in X$，存在唯一元素 $x'\in X$，使 $x+x'=\theta$，称 x' 为 x 的负元素，记作 $-x$。

(2) 对于 X 中的每个元素 $x\in X$，及任何实数(或复数)α，存在元素 $u\in X$ 与之对应，记作 $u=\alpha x$，称为 α 与 x 的数乘，并满足

1) $1\cdot x=x$;

2) $a(bx)=(ab)x$;

3) $(a+b)x=ax+bx$,

称定义了加法与数乘运算的集合 X 为线性空间或向量空间，其中元素称为向量。下面是一些线性空间的例子。

例 10 $\mathbb{R}^n$。

若对$\mathbb{R}^n$ 中任意两点

$$\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\boldsymbol{y}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$$

和任意实数 α，定义

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n) \tag{2.2-1a}$$

$$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\cdots,\alpha\xi_n) \tag{2.2-1b}$$

则$\mathbb{R}^n$ 按上述加法和数乘运算构成线性空间。

例 11 $C[a,b]$。

若对 $C[a,b]$中任意两个元素 x,y 和数 α，定义

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),\quad t\in[a,b] \tag{2.2-2a}$$

$$(\alpha x)(t)=\alpha x(t),\quad t\in[a,b] \tag{2.2-2b}$$

则 $C[a,b]$按上述加法和数乘运算构成线性空间。

例 12 数列空间 l^p。

设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$是实数列或复数列，如果$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<\infty$，则称数列$(\xi_1,\xi_2,\cdots)$是 p 次收敛数列，p 次收敛数列的全体记为 l^p。对任意 $x,y\in l^p$，定义

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n,\cdots) \tag{2.2-3a}$$

$$\alpha x=(\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\cdots,\alpha\xi_n,\cdots) \tag{2.2-3b}$$

易证 l^p 成为线性空间。

设 X 是线性空间，Y 是 X 的非空子集，如果对任意 $x,y\in Y$，及任何数 α，都有 $x+y\in Y$ 及 $\alpha x\in Y$，那么 Y 按 X 中加法和数乘运算也是线性空间，称为 X 的子空间。X 和$\{0\}$是 X 的两个典型的子空间，称为平凡子空间，若 $X\neq Y$，则称 Y 为 X 的真子空间。

设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 是线性空间 X 中的向量，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 m 个数，称$\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\boldsymbol{x}_i$为向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的一个线性组合。它们构成线性空间 X 中的一个子空间，称为由向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 张成的子空间，记作 $span\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m\}$。

对于线性空间 X 中的向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$，如果存在 n 个不全为零的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 使得

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_m\boldsymbol{x}_m=0 \tag{2.2-4}$$

则称 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性相关，否则称为线性无关。

设 M 是线性空间 X 中线性无关子集，如果 $\mathrm{span}M=X$，则称 M 的基数为 X 的维数，记

为 $\dim X$，M 称为 X 的一组基，如果 M 的基数为有限数，则称 X 是有限维线性空间，否则称 X 是无限维线性空间。例如，$\mathbb{R}^n$ 是有限维线性空间，而 $C[a,b]$是无限维线性空间。

2.3 赋范线性空间与 Banach 空间

赋范线性空间是一类特殊的度量空间，在赋范线性空间中，元素之间不仅有距离，元素之间也可以相加和数乘，而且每个元素有类似于普通向量长度的量叫做范数。

定义 2.3-1 设 X 是线性空间，如果对每一个元素 $x\in X$，有一个确定的实数，记作 $\|x\|$ 与之对应，并满足

(1) $\|x\|\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时，有 $\|x\|=0$；

(2) 对任意实数或复数 α，有 $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$；

(3) 对任意 $x,y\in X$，有 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，

则称 $\|x\|$ 为元素 x 的范数，称定义了范数的 X 为赋范线性空间。完备的赋范线性空间，称为巴拿赫(Banach)空间。下面是一些赋范线性空间的例子。

例 13 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$，对每个 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_n|^2} \tag{2.3-1}$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的范数，又因为 $\mathbb{R}^n$ 是完备的，故 $\mathbb{R}^n$ 是 Banach 空间。

例 14 $C[a,b]$，对每个 $x\in C[a,b]$，定义

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)| \tag{2.3-2}$$

容易证明 $C[a,b]$是 Banach 空间。

例 15 空间 $L^p[a,b]$

设 $f(t)$是$[a,b]$上的实值可测函数，$p>0$。如果 $|f(x)|^p$ 是$[a,b]$上 L 可积函数，则称 $f(t)$是$[a,b]$上的 p 方可积函数。$[a,b]$上的 p 方可积函数的全体记为$L^p[a,b]$。对于每一个 $f\in L^p[a,b]$，定义

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.3-3}$$

可以证明，当 $p\geqslant 1$ 时，$L^p[a,b]$按 $\|f\|_p$ 构成 Banach 空间。

对于空间 $L^p[a,b]$有下列两个重要不等式：

(1) Hölder 不等式。

设 $p>1$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$f\in L^p[a,b]$，$g\in L^q[a,b]$，那么 $f(t)$，$g(t)$在 L 上可积，并且 $\int_a^b|f(t)g(t)|\mathrm{d}t\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$；

(2) Minkowski 不等式。

设 $p\geqslant 1$，$f,g\in L^p[a,b]$，那么 $f+g\in L^p[a,b]$，并且 $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$。利用上述两个不等式，就可以证明 $L^p[a,b]$是 Banach 空间。

2.4 内积空间与 Hilbert 空间

在二维和三维空间中，向量不仅有长度还有方向，因而两个向量之间存在夹角。从向量夹角的概念还可进一步引出正交、投影等概念。在赋范线性空间里，向量虽有了长度的概

念，但还没有角度的概念，能否把普通向量的正交等概念引入到线性空间呢，答案是肯定的。

定义 2.4-1 设 X 是复线性空间，如果对 X 中的任意两个元素 x,y，有一个复数 (x,y) 与之对应，并且满足

(1) $(x,x)\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时，$(x,x)=0$；

(2) $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$，$\alpha,\beta$ 为任意复数；

(3) $(x,y)=\overline{(y,x)}$，

则称 (x,y) 为 x 与 y 的内积，而称定义了内积的空间 X 为内积空间。

从内积的定义，可得出等式

$$(x,\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}(x,y)+\bar{\beta}(x,z) \tag{2.4-1}$$

如果 X 是实线性空间，则有

$$(x,\alpha y+\beta z)=\alpha(x,y)+\beta(x,z) \tag{2.4-2}$$

$$(x,y)=(y,x) \tag{2.4-3}$$

对内积空间 X，定义

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)} \tag{2.4-4}$$

则显然有

(1) $\|x\|\geqslant 0$；

(2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$；

进一步利用 Schwarz 不等式

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\| \tag{2.4-5}$$

式中，$x,y\in X$（内积空间），可以证明：

(3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，

称由式(2.4-4)定义的范数 $\|x\|$ 为由内积导出的范数。由内积导出的范数满足平行四边形公式

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2) \tag{2.4-6}$$

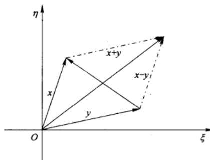


图 2.4-1 平行四边形恒等式的几何解释

图 2.4-1 是 $\mathbb{R}^2$ 中平行四边形恒等式的几何解释，即平行四边形的两对角线长度的平方和等于四边长度的平方和。内积空间的范数是由内积导出的，它满足平行四边形恒等式(parallelogram identity)，而当范数满足平行四边形恒等式时，内积也可以由范数表示，称为极化恒等式(polarization identity)，当 X 是实内积空间时，

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2) \tag{2.4-7}$$

当 X 是复内积空间时，

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\,\|x+iy\|^2-i\,\|x-iy\|^2) \tag{2.4-8}$$

由于任何一个内积空间都可由内积确定一个范数，因此，内积空间又是赋范线性空间的特殊情形。如果内积空间作为导出范数下的一个赋范线性空间是完备的，则称为 Hilbert

空间，或者说 Hilbert 空间是一个特殊的（范数是由内积导出的）巴拿赫(Banach)空间。

下面是一些内积空间的例子。

例 16 平方可积函数空间 $L^2[a,b]$。对 $L^2[a,b]$中任意元素 x,y，定义

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t \tag{2.4-9}$$

易知 $L^2[a,b]$成为内积空间，又定义范数

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)} \tag{2.4-10}$$

则 $L^2[a,b]$构成 Hilbert 空间。

在平方可积函数空间，有两个重要的不等式：

(1) Schwarz 不等式

$$|(f,g)|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$$

证明：设 $f,g\in L^2[a,b]$，则

$$\int_a^b\left|f-\frac{(f,g)}{(g,g)}g\right|^2\mathrm{d}t\geqslant 0$$

$$(f,f)-2\frac{|(f,g)|^2}{(g,g)}+\frac{|(f,g)|^2}{(g,g)}\geqslant 0$$

$$(f,f)\cdot(g,g)\geqslant|(f,g)|^2$$

即

$$|(f,g)|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$$

(2) Minkowski 不等式

$$\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$$

证明：利用 Schwarz 不等式知

$$\begin{aligned}(\|f\|+\|g\|)^2&=\|f\|^2+\|g\|^2+2\|f\|\|g\|\\&\geqslant(f,f)+(g,g)+2|(f,g)|\end{aligned}$$

又

$$2|(f,g)|=(f,g)+\overline{(f,g)}$$

故

$$\begin{aligned}(\|f\|+\|g\|)^2&\geqslant(f,f)+(g,g)+(f,g)+(g,f)\\&=(f+g,f+g)\\&=\|f+g\|^2\end{aligned}$$

即

$$\|f\|+\|g\|\geqslant\|f+g\|$$

例 17 平方收敛数列空间 l^2。对 l^2 中的任意数列

$$x=(x_1,x_2,\cdots);y=(y_1,y_2,\cdots)$$

定义

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\overline{y}_i \tag{2.4-11}$$

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)} \tag{2.4-12}$$

则 l^2 构成 Hilbert 空间。

在平方收敛数列空间 l^2 中，由不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}x_i\overline{y}_i\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|x_i||y_i| \tag{2.4-13}$$

和 Cauchy 不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i||y_i|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^2} \tag{2.4-14}$$

可得 Schwarz 不等式

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\ \|y\| \tag{2.4-15}$$

它是对三维 Euclidean 空间里

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}\|\ \|\boldsymbol{y}\|\cos\alpha,(\alpha\text{ 为向量 }\boldsymbol{x}\text{ 与 }\boldsymbol{y}\text{ 的夹角})$$

在无限数列空间的推广。此外，在 l^2 中还有下列三角不等式成立

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\| \tag{2.4-16a}$$

$$\|x-y\|\leqslant\|x\|+\|y\| \tag{2.4-16b}$$

例 18 当 $p\neq2$ 时，l^p 不是内积空间。

令 $x=(1,1,0,\cdots)$，$y=(1,-1,0,\cdots)$，则 $x,y\in l^p$。但 $\|x\|=\|y\|=2^{\frac{1}{p}}$，$\|x+y\|=\|x-y\|=2$，平行四边形公式不满足，这说明 $l^p(p\neq2)$ 中的范数不能由内积导出，因而不是内积空间。

记 $\mathbb{R}^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\}$，$\mathbb{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 n 维实向量。在定义了加法和数乘运算

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\triangleq(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n) \tag{2.4-17}$$

$$\alpha\boldsymbol{x}\triangleq(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)\ ,(\alpha\in\mathbb{R},\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n) \tag{2.4-18}$$

后，称 $\mathbb{R}^n$ 为实线性空间或实向量空间。定义了内积运算

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \tag{2.4-19}$$

后，称 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维欧几里得空间(n -dimensional Euclidean space)，也记作 E^n。当 $n\leqslant3$ 时，称为几何空间，当 $n>3$ 时，E^n 已没有直观性。$\mathbb{R}^n$ 是定义在实数集 $\mathbb{R}$ 上的一个空间，而称定义在复数域 $\mathbb{C}$ 上的欧几里得空间为酉空间(unitary space)，记作 $\mathbb{C}^n$，在酉空间，内积定义为

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+\cdots+x_n\bar{y}_n \tag{2.4-20}$$

从而有 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}$。酉空间与欧几里得空间内积结构的差异确保了两者在长度、距离和正交等概念上的一致。

希尔伯特空间是一种最接近于 $\mathbb{R}^n$ 的无限维空间，类似于 $\mathbb{R}^n$ 中向量有 n 个基向量一样，希尔伯特空间有可数个基向量。现在将 $\mathbb{R}^n$ 中正交与投影的概念推广于一般的内积空间。

定义 2.4-2 设 X 是内积空间，如果 X 中的两个元素 x 和 y 满足 $(x,y)=0$，则称 x 与 y 正交(orthogonal)，记作 $x\perp y$。设 V 是 X 的子集，$x\in X$，如果对 $\forall y\in V$，$x\perp y$，则称 x 与 V 正交，记作 $x\perp V$。集合 $\{x\in X\,|\,x\perp V\}$ 称为 V 的正交补(orthogonal complement)，记作 $V^{\perp}$，设 V 与 W 是 X 的两个子集，如果 $x\perp y$，$\forall x\in V,y\in W$，则称 V 与 W 正交，记作 $V\perp W$。

下述性质可由定义直接推出。

(1) $x\perp y\Rightarrow\|x+y\|=\|x-y\|$，且 $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$(广义勾股定理)；

(2) $x\perp y,\forall y\in X\Leftrightarrow x=0$；

(3) $V,W\subset X$，且 $V\perp W\Rightarrow V\subset W^{\perp},W\subset V^{\perp}$；

(4) $V\subset W\subset X\Rightarrow V^{\perp}\supset W^{\perp}$；

(5) $V \subset X \Rightarrow V^{\perp} \cap V = \{0\}$。

定义 2.4-3 设 V_1 与 V_2 是内积空间 X 的两个线性子空间，且 $V_1 \perp V_2$，则称集合 $V = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$ 为 V_1 与 V_2 的正交和(orthogonal sum)，记作 $V = V_1 \oplus V_2$。

从正交和的定义可以引出在 Hilbert 空间中占有重要地位的投影概念。

定义 2.4-4 设 V 是内积空间 X 的线性子空间，$x \in X$，如果有 $y \in V$，$z \perp V$，使得 $x = y + z$，则称 y 是 x 在 V 上的正交投影(orthogonal projection)或简称投影，记作 $y = \mathbf{P}_V x$。

一般地说，对于内积空间 X 的任一元素 x 与任一线性子空间 V，x 在 V 上的投影 $\mathbf{P}_V x$ 不一定存在。如果 $\mathbf{P}_V x$ 存在的话，由定义知它满足

$$(x - \mathbf{P}_V x, y) = 0, (\forall y \in V) \tag{2.4-21}$$

那么在什么条件下，x 在 V 上的投影一定存在呢？

定理 2.4-1 （投影定理）设 V 是内积空间 X 的完备线性子空间，则对任何 $x \in X$，存在唯一的 $y \in V$，使得 $y = \mathbf{P}_V x$，而且

$$\| x - y \| = \min_{z \in V} \| x - z \| \tag{2.4-22}$$

即 y 是 V 中距 x 最近的点。

投影定理是希尔伯特空间理论中极为重要的一个基本定理。它表明用 V 中的元素 z 来逼近 x，当且仅当 z 等于 x 在 V 上的投影 y 时，逼近的效果最佳。

例 19 设 $V = \mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是内积空间 X 的一个完备子空间，$x \in X$，寻找 n 个系数 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_n^*$，使得

$$\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* x_i \| = \min_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n} \| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \|$$

解：因为 V 是完备子空间，由投影定理知，必存在唯一的 $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* x_i \in V$ 使得 $\| x - y \|$ 达到最小，而且 $(x - y) \perp V$ 即 $(x - y, z) = 0, \forall z \in V$。这等价于

$$(x - y, x_k) = 0, \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

或者

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* (x_i, x_k) = (x, x_k), \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是标准正交基，则得

$$\alpha_k^* = (x, x_k), \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

定义 2.4-5 设 V 是内积空间 X 的非空子集，如果 V 中任意两个元素都正交，则称 V 为 X 的一个正交集(orthogonal set)，如果正交集 V 中每个元素的范数均为 1，则称 V 为规范正交集(normalized orthogonal set)。

正交集有下列性质：

(1) 对正交集 M 中任意有限个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，有

$$\| x_1 + x_2 + \cdots + x_n \|^2 = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 + \cdots + \| x_n \|^2 \tag{2.4-23}$$

事实上，由于 M 中向量两两相交，所以

$$\| \sum_{i=1}^{n} x_i \|^2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j) = \sum_{i=1}^{n} (x_i, x_i) = \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^2 \tag{2.4-24}$$

(2) 正交集 M 是 X 中的线性无关子集。设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in M,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 个数，由

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=0$$

得 $(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i,x_j)=0$；进一步有 $\alpha_j(x_j,x_j)=0$，从而 $\alpha_j\ \|x_j\|^2=0$。
因为

$$\|x_j\|^2\neq 0$$

故 $\alpha_j=0(j=1,2,\cdots,n)$。这就说明 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性无关的。

如果 $V=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是由非零向量组成的正交序列，则 V 是线性无关的，按照格拉姆－施密特(Gram－Schmidt)正交化方法，即按照递推公式

$$z_n=x_n-\sum_{k=1}^{n-1}(x_n,y_k)y_k;y_n=\|z_n\|^{-1}z_n,(n=1,2,\cdots) \tag{2.4-25}$$

可以得到一个规范正交化序列

$$W=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

使得

$$\text{span}\{x_n|x_n\in V\}=\text{span}\{y_n|y_n\in W\}$$

在内积空间中引入规范正交集的目的是要把空间中的向量关于规范正交系展开成级数形式。

定义 2.4-6 设 $V=\{e_i\}_{n=1}^{\infty}$ 是内积空间的规范正交序列，$x\in X$，称级数 $\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$ 为函数 x 关于 V 的傅里叶级数(Fourier series)或傅里叶展开式(Fourier expansion)。而称数集 $\{(x,e_i)|e_i\in V\}$ 为函数 x 关于规范正交集 V 的傅里叶系数集(Fourier coefficients set)。

傅里叶系数，具有下列性质：

(1) $\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\geqslant 0$；

(2) $\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\|\geqslant\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\|$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为任意 n 个数。

证明：对任意 n 个数，有

$$\begin{aligned}\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\|^2&=(x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i)\\&=(x,x)-(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,x)-(x,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i)+(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j)\\&=\|x\|^2-2\text{Re}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(e_i,x)+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\end{aligned}$$

令 $\alpha_i=(x,e_i)$，代入上式得

$$\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2=\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\|^2\geqslant 0$$

利用性质(1)，知

$$\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\|^2-\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2-(\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - (x, e_i)|^2 \geqslant 0$$

这样就证明了性质(2)。

上述性质(1)实际上就是贝塞尔不等式。

定理 2.4-2 (贝塞尔不等式(Bessel inequality))设$\{e_i\}$是内积空间 X 中的有限或可数规范正交系，那么对每个 $x \in X$，有下列不等式成立

$$\sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2 \leqslant \|x\|^2 \tag{2.4-26}$$

当$\{e_i\}_{i=1}^{n}$是有限向量时，上述定理的证明与性质(1)的证明完全相同，当$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$是可数无限多个向量时，只须在证明过程中令 $n \to \infty$。

利用上述性质不难证明下面关于 Fourier 级数收敛性的定理。

定理 2.4-3 设$\{e_i\}$为 Hilbert 空间中的可数规范正交系，那么

(1) 级数$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$收敛的充分必要条件为级数$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$收敛；

(2) 对任何 $x \in X$，级数$\sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i$收敛。

现在分析在什么条件下 Bessel 不等式可变成等式。为此首先引入完全规范正交系的概念。

定义 2.4-7 设 $V = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$是内积空间 X 的规范正交集，而且 $V^{\perp} = \{0\}$即当且仅当 $x = 0$时，$x \perp V (x \in V)$，则称 V 为 X 的完全规范正交集，即在完全规范正交系中不可能再加进去新的不为零的函数，构成更大的规范正交系。

定理 2.4-4 (帕塞瓦尔定理)设 $V = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$是 Hilbert 空间 X 中的完全规范正交集，则对每一个 $x \in X$，有帕塞瓦尔(Parseval)等式成立

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \tag{2.4-27}$$

2.5 线性算子

定义 2.5-1 设 X, Y 是两个线性空间，定义于 $\Omega \subset X$ 而取值于 Y 的映射 $\mathbf{T}$ 称为算子(operator)。$\Omega \subset X$ 称为 $\mathbf{T}$ 的定义域(domain)，记作 $D(\mathbf{T})$；$D(\mathbf{T})$ 的像集：$\{y \in Y | y = \mathbf{T}x, x \in D(\mathbf{T})\}$称为 $\mathbf{T}$ 的值域(range)，记作 $R(\mathbf{T})$。

若对任意 $x_1, x_2 \in D(\mathbf{T})$和任意常数 α, β 算子 $\mathbf{T}$ 满足

$$\mathbf{T}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \mathbf{T} x_1 + \beta \mathbf{T} x_2 \tag{2.5-1}$$

则称算子 $\mathbf{T}$ 为线性算子。

若线性算子 $\mathbf{T}$ 还进一步满足

$$\|\mathbf{T}x\|_y \leqslant M \|x\|_x \tag{2.5-2}$$

则称 $\mathbf{T}$ 为有界线性算子(bounded linear operator)，其中 M 为有限常数，$\|\cdot\|_x$ 和 $\|\cdot\|_y$ 分别为赋范空间 X, Y 的范数。

定义 2.5-2 设 X, Y 是两个赋范线性空间，对任何 $x_1, x_2 \in X$ 与给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当

$$\|x_1 - x_2\|_x \leqslant \delta$$

时，有

$$\| \mathbf{T}x_1 - \mathbf{T}x_2 \|_y < \varepsilon$$

则称 $\mathbf{T}$ 为 X 到 Y 的连续线性算子。

定理 2.5-1 赋范空间 X 到赋范空间 Y 的线性算子 $\mathbf{T}$ 为连续线性算子的充要条件是：算子 $\mathbf{T}$ 是有界线性算子。

这一定理表明，对于赋范空间之间的线性算子，连续性与有界性是等价的。

另外，从赋范空间 X 到赋范空间 Y 的映射或算子有很多，所有这些算子的集合，记作 $L(X,Y)$，如果对任意算子 $\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2 \in L(X,Y)$ 及任意数 α,β，

$$(\alpha\mathbf{T}_1 + \beta\mathbf{T}_2)x = \alpha\mathbf{T}_1 x + \beta\mathbf{T}_2 x, (\forall x \in X) \tag{2.5-3}$$

则 $L(X,Y)$ 构成一个线性空间。这样算子也可有范数的概念。令

$$\| \mathbf{T} \| = \sup \left\{ \frac{\| \mathbf{T}x \|_y}{\| x \|_x} \middle| x \in X, \| x \|_x \neq 0 \right\} \tag{2.5-4}$$

称为算子的范数。于是 $L(X,Y)$ 成为赋范线性空间。容易验证

$$\begin{aligned} \| \mathbf{T} \| &= \sup \{ \| \mathbf{T}x \|_y \mid x \in X, \| x \|_x = 1 \} \\ &= \inf \{ M \mid \| \mathbf{T}x \|_y \leqslant M \| x \|_x, \forall x \in X \} \end{aligned} \tag{2.5-5}$$

现在来考虑算子序列 $\{\mathbf{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果

$$\lim_{n \to \infty} \| \mathbf{T}_n - \mathbf{T} \| = 0, \mathbf{T} \in L(X,Y) \tag{2.5-6}$$

则称算子序列 $\{\mathbf{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按算子范数收敛于 $\mathbf{T}$。如果 $\{\mathbf{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按算子范数收敛于 $\mathbf{T}$，则在 X 中的任意有界集上，

$$\lim_{n \to \infty} \| \mathbf{T}_n x - \mathbf{T}x \| = 0 \tag{2.5-7}$$

一致成立。因此，按算子范数收敛又称为一致收敛。设 X,Y 是赋范线性空间，$\{\mathbf{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L(X,Y)$ 中的一个序列，如果对每一个 $x \in X$，有

$$\lim_{n \to \infty} \| \mathbf{T}_n x - \mathbf{T}x \| = 0 \tag{2.5-8}$$

则称序列 $\{\mathbf{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 强收敛于 $\mathbf{T}$。有界线性算子序列按范数收敛可以推出强收敛，反之则不然。

例 20 设 $k(x,t)$ 是定义在矩形 $a \leqslant x, t \leqslant b$ 上的可测函数，满足

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t < +\infty$$

对任意的 $x \in L^2(a,b)$，若令

$$y(t) = (\mathbf{T}x)(t) \triangleq \int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

则由 Schwarz 不等式得

$$|y(t)|^2 \leqslant \int_a^b |k(t,s)|^2 \mathrm{d}s \int_a^b |x(s)|^2 \mathrm{d}s$$

$$\int_a^b |y(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t \cdot \int_a^b |x(s)|^2 \mathrm{d}s$$

$$\| y \| \leqslant \left(\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 \mathrm{d}t\mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \| x \|$$

因此，$y \in L^2(a,b)$，即 $\mathbf{T}$ 是 $L^2(a,b)$ 到自身的一个有界线性算子。对于 $L^2(a,b)$ 如果定义算子范数

$$\| k \|_2 = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t}$$

则上式可写成

$$\| y \| \leqslant \| k \|_2 \ \| x \|$$

定义 2.5-3 设 X,Y,Z 都是赋范线性空间，$\mathbf{T} \in L(X,Y)$，$\mathbf{S} \in L(Y,Z)$，则 $\mathbf{T}$ 与 $\mathbf{S}$ 的乘积(multiplication)$\mathbf{ST}$ 是属于 $L(X,Z)$，且

$$(\mathbf{ST})x = \mathbf{S}(\mathbf{T}x) \quad \forall x \in X \tag{2.5-9}$$

算子乘积具有下列性质

(1) $\mathbf{RST} = \mathbf{R}(\mathbf{ST}) = (\mathbf{RS})\mathbf{T}$ (associative law)；

(2) $\mathbf{S}(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2) = \mathbf{ST}_1 + \mathbf{ST}_2$ (distributive law)；

(3) $(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)\mathbf{T} = \mathbf{S}_1\mathbf{T} + \mathbf{S}_2\mathbf{T}$；

(4) $(\alpha\mathbf{S})(\beta\mathbf{T}) = (\alpha\beta)\mathbf{ST}$；

(5) $\| \mathbf{ST} \| \leqslant \| \mathbf{S} \| \ \| \mathbf{T} \|$；

(6) $\mathbf{T}^0 = \mathbf{I}$(恒等算子即 $\mathbf{I}x = x$)，$\mathbf{T}^1 = \mathbf{T}$，$\mathbf{T}^{n+m} = \mathbf{T}^n \cdot \mathbf{T}^m$；

(7) 一般情况下，$\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 \neq \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$；当 $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$(commutative law)时，称 $\mathbf{T}_1$ 与 $\mathbf{T}_2$ 可交换；

(8) 若 $\mathbf{TS}x = \mathbf{ST}x = x$，$\forall x \in X$，则称 $\mathbf{T}$ 与 $\mathbf{S}$ 互为逆算子，即 $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$ 或 $\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1}$。

定义 2.5-4 设 X 是实数(或复数)域 K 上的赋范线性空间，定义在 X 上而取值于 K 的算子称为泛函(functional)。

例如 $X = L^2(a,b)$ 是平方可积函数空间，而对

$$y = \int_a^b k(t)x(t)\mathrm{d}t \in K$$

可称算子 $\mathbf{K}(y = \mathbf{K}x)$ 为泛函，但对

$$y(x) = \int_a^b k(x,t)x(t)\mathrm{d}t$$

由于 $y(x) \in L^2(a,b)$ 而不属于 K，则可以称 $\mathbf{K}$ 为算子，但不能称为泛函。这是算子与泛函的区别。

由于数域 K 本身是一个 Banach 空间，所以 X 上的所有连续线性泛函构成的赋范线性空间是一个 Banach 空间，称这个空间为 X 的共轭空间(conjugate space)，记作 X^*。它又可称为对偶空间(dual space)或伴随空间(adjoint space)。

定义 2.5-5 设 X,Y 是赋范线性空间，$\mathbf{T} \in L(X,Y)$ 对任意 $g \in Y^*$ 由式

$$f(x) = g(\mathbf{T}x), \forall x \in X \tag{2.5-10}$$

唯一地确定了一个 $f \in X^*$，记作 $f = \mathbf{T}^* g$，则有 $\mathbf{T}^* \in L(Y^*, X^*)$，称 $\mathbf{T}^*$ 为 $\mathbf{T}$ 的共轭算子(conjugate operator)。

算子与其共轭算子 $\mathbf{T}^*$ 的区别可用图 2.5-1表示，即算子 $\mathbf{T}$ 实现从函数空间 X 到函数空间 Y 的映射，其作用的对象和结果(像)都是函数空间，而共轭算子实现从泛函空间(函数空间的共轭空间)Y^* 到泛函空间 X^* 的映射，其作用对象和结果(像)都是泛函空间，即函数的共轭空间。

共轭算子具有如下性质：

(1) 若 $\mathbf{T} \in L(X,Y)$，则 $\mathbf{T}^* \in L(Y^*, X^*)$；

(2) 若 $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in L(X,Y)$，$\alpha,\beta$ 为任意数，则 $(\alpha\mathbf{T}_1 + \beta\mathbf{T}_2)^* = \alpha\mathbf{T}_1^* + \beta\mathbf{T}_2^*$；

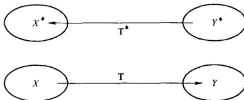


图 2.5-1 算子与共轭算子

(3) 若 $\mathbf{T}_1\in L(X,Y)$，$\mathbf{T}_2\in L(Y,Z)$，则 $(\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1)^*=\mathbf{T}_1^*\mathbf{T}_2^*\in L(Z^*,X^*)$；

(4) 若 $\mathbf{T}\in L(X,Y)$，$\mathbf{T}^{-1}\in L(Y,X)$，则 $(\mathbf{T}^*)^{-1}$ 存在，并且 $(\mathbf{T}^*)^{-1}=(\mathbf{T}^{-1})^*$。

定义 2.5-6 设 X 是一个 Hilbert 空间，$\mathbf{T}\in L(X,X)$ 对每个确定的 $y\in X$，由式

$$f(x)=(\mathbf{T}x,y),\ \forall x\in X \tag{2.5-11}$$

确定一个 X 上的连续线性泛函。存在唯一的 $u\in X$，使得

$$f(x)=(x,u),\ \forall x\in X \tag{2.5-12}$$

式中，u 是由 y 唯一确定的，所以记为

$$u=\mathbf{T}'y \tag{2.5-13}$$

$\mathbf{T}'$ 是 X 上的一个线性算子，称 $\mathbf{T}'$ 为 $\mathbf{T}$ 的伴随算子(adjoint operator)。

伴随算子有下列性质：

(1) 若 $\mathbf{T}\in L(X,X)$，则 $\mathbf{T}'\in L(X,X)$，且 $\|\mathbf{T}'\|=\|\mathbf{T}\|$；

(2) 若 $\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2\in L(X,X)$，$\alpha,\beta$ 为任意常数，则 $(\alpha\mathbf{T}_1+\beta\mathbf{T}_2)'=\alpha\mathbf{T}'_1+\beta\mathbf{T}'_2$；

(3) 若 $\mathbf{T}\in L(X,X)$，则 $\mathbf{T}''=\mathbf{T}$；

(4) 若 $\mathbf{T}\in L(X,X)$，$\mathbf{T}^{-1}\in L(X,X)$，则 $(\mathbf{T}')^{-1}$ 存在，且 $(\mathbf{T}')^{-1}=(\mathbf{T}^{-1})'$；当 X 是 Hilbert 空间，$\mathbf{T}\in L(X,X)$ 时，$\mathbf{T}$ 的共轭算子与伴随算子相同。

例 21 设 $X=L^2(a,b)$，$\mathbf{T}\in L(X,X)$ 由下式确定

$$(\mathbf{T}x)(t)=\int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s,\ \forall x\in X$$

式中，积分核 $k(t,s)$ 是矩形域 $a\leqslant t,s\leqslant b$ 上的平方可积函数，则 $\mathbf{T}$ 的共轭算子由下式确定

$$(\mathbf{T}^*y)(t)=\int_a^b k(s,t)y(s)\mathrm{d}s,\ \forall y\in X$$

而 T 的伴随算子由下式确定

$$(\mathbf{T}'y)(t)=\int_a^b \overline{k(s,t)}y(s)\mathrm{d}s,\ \forall y\in X$$

定义 2.5-7 设 X,Y 是两个赋范线性空间，算子 $\mathbf{T}$ 的定义域 $D(\mathbf{T})$ 是 X 的线性子空间，如果存在常数 c，使对所有 $x\in D(\mathbf{T})$，有

$$\|\mathbf{T}x\|\leqslant c\ \|x\| \tag{2.5-14}$$

则称 $\mathbf{T}$ 是由 $D(\mathbf{T})$ 到 Y 中的有界线性算子，否则称为无界算子。

定理 2.5-2 设 $\mathbf{T}$ 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 中的线性算子，则 $\mathbf{T}$ 为有界算子的充要条件为 $\mathbf{T}$ 是 X 上连续算子。

定义 2.5-8 设 $\mathbf{T}$ 是 Hilbert 空间 X 到 X 中的有界线性算子，若 $\mathbf{T}=\mathbf{T}^*$ 则称 $\mathbf{T}$ 为 X 上的自伴算子；若 $\mathbf{T}$ 是 X 到 X 上的一一对应映射，且 $\mathbf{T}^*=\mathbf{T}^{-1}$，则称 $\mathbf{T}$ 为 X 上的酉算子。

由定义知酉算子必为正常算子，但正常算子不一定是酉算子或自伴算子。例如 $\mathbf{T}=-2i\mathbf{I}$，则

$\mathbf{T}^*=2i\mathbf{I}$，所以 $\mathbf{T}\mathbf{T}^*=\mathbf{T}^*\mathbf{T}=4\mathbf{I}$，即是正常算子，但 $\mathbf{T}$ 既不是自伴算子，也不是酉算子。

2.6 线性算子的谱

定义 2.6-1 设 X 是 Banach 空间，$\mathbf{T}\in B(X,X)$，λ 是一复数，若 $(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I})$ 的逆算子 $(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I})^{-1}$ 存在，则称 λ 是算子 $\mathbf{T}$ 的正则值或正则点。$\mathbf{T}$ 的正则点全体为 $\mathbf{T}$ 的正则集，或预解集(resolvent set)，记为 $\rho(\mathbf{T})$。当 $\lambda\in\rho(\mathbf{T})$ 时，称 $\mathbf{R}(\lambda,\mathbf{T})\triangleq(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I})^{-1}$ 为算子 $\mathbf{T}$ 在 λ 处的预解算子(resolvent operator)。所有不属于 $\rho(\mathbf{T})$ 的点称为算子 $\mathbf{T}$ 的谱点，其全体构成 $\mathbf{T}$ 的谱，记作 $\sigma(\mathbf{T})$。

谱可作如下分类：

(1) 如果 $(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I})$ 不是一对一，此时存在 $x\in X,x\neq0$ 使 $(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I})x=0$，即 $\mathbf{T}x=\lambda x$，这时称 λ 是算子 $\mathbf{T}$ 的特征值(eigen value)，x 称为对应于 λ 的特征向量(eigen vector)。对应于特征值 λ 的所有特征向量张成的线性子空间称为算子 $\mathbf{T}$ 对应于 λ 的特征空间(eigen space)，这个空间的维数称为 λ 的几何重数(multiplicity)。$\mathbf{T}$ 的特征值的全体称为 $\mathbf{T}$ 的点谱，记作 $\sigma_p(\mathbf{T})$；

(2) $(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I})$ 是一对一的，但值域不充满全空间；

(3) $(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I})$ 是一对一的，但 $(\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I})^{-1}$ 不是有界的。

(2)类和(3)类谱点合称为算子 $\mathbf{T}$ 的连续谱，记为 $\sigma_c(\mathbf{T})$。

有界线性算子的谱有如下性质

定理 2.6-1 设 $\mathbf{T}\in B(X,X)$，则 $\rho(\mathbf{T})$ 是开集，$\sigma(\mathbf{T})$ 是闭集。

定理 2.6-2 设 $\mathbf{T}\in B(X,X)$，则 $\sigma(\mathbf{T})$ 是有界闭集，且当 $\lambda\in\sigma(\mathbf{T})$ 时有 $|\lambda|\leqslant\|\mathbf{T}\|$，由此可知 $\rho(\mathbf{T})$ 非空。

为了把谱论应用于积分方程，我们要介绍一种全连续算子，它的定义又涉及紧集的概念。

定义 2.6-2 设 X 和 Y 是赋范线性空间，$\mathbf{T}$ 是 X 到 Y 的线性算子。如果对 X 的任意有界子集 M，$\mathbf{T}M$ 都是 Y 中相对紧集，则称 $\mathbf{T}$ 为全连续算子，亦称紧算子。

容易看出，$\mathbf{T}$ 是全连续算子的充要条件是：设 $\{x_n\}$ 是 X 中的有界点列，则必有收敛子列。

例 22 设 $k(s,t)=\sum\limits_{k=1}^{n}g_k(t)f_k(s)$，其中 $f_k,g_k\in L^2[a,b]$，$\{g_i\}$ 是线性无关的，定义

$$(\mathbf{A}\varphi)(t)=\int_a^b k(s,t)\varphi(s)\mathrm{d}s\quad \varphi\in L^2[a,b]$$

则 $\mathbf{A}$ 是全连续算子。

证明：由于

$$(\mathbf{A}\varphi)(t)=\int_a^b\Big[\sum_{k=1}^{n}g_k(t)f_k(s)\Big]\varphi(s)\mathrm{d}s=\sum_{k=1}^{n}\Big[\int_a^b f_k(s)\varphi(s)\mathrm{d}s\Big]g_k(t)$$

可知算子 $\mathbf{A}$ 的值域是 $F=\mathrm{span}\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$，任给 $L^2[a,b]$ 中有界集 M，容易看出 $\mathbf{A}$ 是有界算子，故 $\mathbf{A}M$ 是 F 中的有界集。因 F 是有限维空间，它的有界集都是相对紧的，故 $\mathbf{A}M$ 为相对紧集。证毕。

设 X 为 Banach 空间，全连续算子 $\mathbf{T}\in L(X,X)$ 的谱具有如下性质：

(1) 除 0 之外，对任意的复数 λ，或者 $\lambda\in\rho(\mathbf{T})$，或者 $\lambda\in\sigma_p(\mathbf{T})$；

(2) $\sigma(\mathbf{T})$ 是复平面上一个有限集或可列集，最多有一个极限点 $\lambda_0=0$；

(3) $\sigma(\mathbf{T}^*)=\sigma(\mathbf{T})$，如果 $\lambda\neq0$ 是 $\mathbf{T}$ 的一个特征值，则 λ 也是 $\mathbf{T}^*$ 的特征值，并且 λ 作为 $\mathbf{T}$

和 $\mathbf{T}^*$ 的特征值的重数相同；

(4) $\mathbf{T}$ 的每一个特征值是有限重的。

习　题

1. 设 $d(x,y)$ 为空间 X 上的距离，证明：

$$\tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

也是空间 X 上的距离。

2. 设 X,Y,Z 为三个度量空间，f 是 X 到 Y 中的连续映射，g 是 Y 到 Z 中的连续映射，证明：复合映射 $gf(x)=g(f(x))$ 是 X 到 Z 中的连续映射。

3. 设 X 是赋范线性空间，$X\times X$ 为两个 X 的笛卡儿乘积空间，对每个 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in X\times X$，定义

$$\|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|=\sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2}$$

则 $X\times X$ 成为赋范线性空间。证明：$X\times X$ 到 X 的映射 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 是连续映射。

4. 设 $\{x_n\}$ 是内积空间 X 中点列，若 $\|x_n\|\to\|x\|,(n\to\infty)$，且对一切 $y\in X$ 有 $(x_n,y)\to(x,y),(n\to\infty)$，证明 $x_n\to x,(n\to\infty)$。

5. 设 X 是实内积空间，若 $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$，则 $x\perp y$，当 X 是复内积空间时，这个结论是否仍然成立？

6. 证明：内积空间 X 中两个向量 x,y 垂直的充要条件是：对一切数 α，成立

$$\|x+\alpha y\|\geqslant\|x\|$$

7. 设 X 是 Hilbert 空间，$M\subset X$ 并且 $M\neq\varnothing$，证明 $(M^{\perp})^{\perp}$ 是 X 中包含 M 的最小闭子空间。

8. 设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为内积空间 X 中规范正交系，证明：X 到 span $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的投影算子 $\mathbf{P}$ 为

$$\mathbf{P}x=\sum_{v=1}^{n}(x,e_v)e_v,x\in X$$

9. 设 $\mathbf{T}$ 是 Hilbert 空间 X 中有界线性算子，$\|\mathbf{T}\|\leqslant 1$，证明：

$$\{x\,|\,\mathbf{T}x=x\}=\{x\,|\,\mathbf{T}^*x=x\}$$

10. 证明：$\mathbf{A}$ 是实内积空间 X 上的自伴算子时，$\mathbf{A}=0$ 的充分必要条件为对所有 $x\in X$，成立 $(\mathbf{A}x,x)=0$。

11. 设 $X=C[0,1]$，$(\mathbf{A}x)(t)=tx(t),x\in X$。证明 $\sigma(A)=[0,1]$，且其中没有特征值。

12. 设 $X=C[0,2\pi]$，$(\mathbf{A}x)(t)=e^{it}x(t),x\in X$。证明

$$\sigma(A)=\{\lambda|\quad|\lambda|=1\}$$

13. 设 λ 为线性算子 $\mathbf{A}^n$ 的特征值，则 λ 的 n 次根中至少有一个是算子 $\mathbf{A}$ 的特征值。

14. 设 $\mathbf{A}$ 为 Banach 空间 X 上的有界线性算子，$\lambda_0\in\rho(A)$，又设 $\{\mathbf{A}_n\}$ 为 X 上一列有界线性算子，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\mathbf{A}_n-\mathbf{A}\|=0$，证明当 n 充分大后，$\mathbf{A}_n$ 也以 λ_0 为正则点。

15. 设 $\mathbf{A}$ 为 Hilbert 空间上的有界线性算子，$\mathbf{A}^*$ 为 $\mathbf{A}$ 的共轭算子，证明

$$\sigma(\mathbf{A}^*)=\{\lambda\,|\,\bar{\lambda}\in\sigma(\mathbf{A})\}=\overline{\sigma(\mathbf{A})}$$

16. 设 $\mathbf{T}_1$ 是 X_1 到 X_2 的全连续算子，$\mathbf{T}_2$ 是 X_2 到 X_3 的有界线性算子，则 $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ 是 X_1 到 X_3 的全连续算子。

17. 设

$$(\mathbf{A}\varphi)(s)=\int_0^1 e^{s+t}\varphi(t)\,dt$$

求 $\mathbf{A}$ 的特征值和特征函数。

18. 若

$$k(s,t)=\cos(s+t),0\leqslant s,t\leqslant\pi$$

求积分算子 $\mathbf{K}$ 的特征值和特征函数。

3 连续或平方可积核积分方程

3.1 连续核和平方可积核

设 $k(x,t)$ 和 $\varphi(t)$ 分别是在区域 $a\leqslant x,t\leqslant b$ 和区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数，则函数

$$y(x)=\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{3.1-1}$$

也是 $[a,b]$ 上的连续函数。事实上，因为 $k(x,t)$ 连续，故(3.1-1)对任意 $\varepsilon>0$，就存在与 t 无关的正数 δ，使得当 $|x-x'|<\delta$ 时，有

$$|k(x,t)-k(x',t)|<\varepsilon \tag{3.1-2}$$

同理，因 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故存在正数 A，使得

$$\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|\varphi(t)|\leqslant A \tag{3.1-3}$$

故当 $|x-x'|<\delta$ 时有

$$|y(x)-y(x')|\leqslant\int_a^b|k(x,t)-k(x',t)|\cdot|\varphi(t)|\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon A(b-a) \tag{3.1-4}$$

方程(3.1-1)右端的积分运算相当于一连续映射，它将 $[a,b]$ 上的连续函数 $\varphi(t)$ 连续映射成 $[a,b]$ 上的连续函数 $y(x)$。因此，可用算子形式改写方程(3.1-1)为

$$y=\mathbf{K}\varphi \tag{3.1-5}$$

定义连续函数的范数(norm)

$$\|y(x)\|=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|y(x)| \tag{3.1-6}$$

和连续算子的范数

$$\|\mathbf{K}\|=|b-a|\sup_{a\leqslant x,t\leqslant b}|k(x,t)| \tag{3.1-7}$$

则有

$$\|y\|\leqslant\|\mathbf{K}\|\cdot\|x\| \tag{3.1-8}$$

称具有这种性质的积分核 $k(x,t)$ 为连续核(continuous kernel)。连续核具有如下性质：

(1) 对任意连续函数 $\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$ 及任意常数 α 和 β，有

$$\mathbf{K}(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)=\alpha\mathbf{K}\varphi_1+\beta\mathbf{K}\varphi_2 \tag{3.1-9}$$

即连续核定义的积分算子是线性算子(linear integral operator)。

(2) 设 $k_1(x,t)$ 和 $k_2(x,t)$ 都是区域 $a\leqslant x,t\leqslant b$ 上的连续核，由其定义的线性积分算子分别用 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 表示，则有

$$\begin{aligned}Z(s)&=\mathbf{K}_2(\mathbf{K}_1y)\\&=\int_a^b k_2(s,x)\mathrm{d}x\int_a^b k_1(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\left[\int_a^b k_2(s,x)k_1(x,t)\mathrm{d}x\right]\varphi(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \int_a^b k(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{3.1-10}$$

式中

$$k(s,t) = \int_a^b k_2(s,x)k_1(x,t)\mathrm{d}x \tag{3.1-11}$$

记作 $k(s,t) = k_2k_1(s,t)$。并称积分核 $k(s,t)$ 为积分核 $k_2(s,x)$ 和 $k_1(x,t)$ 的合成核。由连续核定义的线性积分算子对乘法满足结合率(associative law),即

$$\mathbf{G}(\mathbf{HK}) = (\mathbf{GH})\mathbf{K} \tag{3.1-12}$$

对加法满足分配率(distributive law),即

$$\mathbf{G}(\mathbf{H}+\mathbf{K}) = \mathbf{GH}+\mathbf{GK} \tag{3.1-13a}$$

$$(\mathbf{G}+\mathbf{H})\mathbf{K} = \mathbf{GK}+\mathbf{HK} \tag{3.1-13b}$$

但一般不满足交换率(commutative law),即

$$\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1 \neq \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2 \tag{3.1-14}$$

(3) 由式(3.1-11)和积分核范数的定义(3.1-7)知

$$|k_2k_1(s,t)| \leqslant \int_a^b |k_2(s,x)| \cdot |k_1(x,t)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{\|\mathbf{K}_2\|}{|b-a|} \cdot \frac{\|\mathbf{K}_1\|}{|b-a|} \cdot |b-a| = \frac{1}{|b-a|}\|\mathbf{K}_2\| \cdot \|\mathbf{K}_1\| \tag{3.1-15}$$

故有

$$\|\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1\| \leqslant \|\mathbf{K}_2\| \cdot \|\mathbf{K}_1\| \tag{3.1-16}$$

以上讨论了连续核,现在讨论平方可积积分核。设函数

$$y(x) = \int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{3.1-17}$$

式中,$y(x) \in L^2[a,b]$,$\varphi(t) \in L^2[a,b]$。$k(x,t)$ 是区域 $a \leqslant x, t \leqslant b$ 上的可测函数并且满足

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t < \infty \tag{3.1-18}$$

则称 $k(x,t)$ 为平方可积积分核(square integrable kernel)。若上式积分是黎曼(Riemann)积分,记作 R^2 核;若上式积分是勒贝格(Lebesque)积分,记作 L^2 核。

平方可积积分核将 $L^2[a,b]$ 中的函数,映射成 $L^2[a,b]$ 中的函数。定义平方可积函数的范数

$$\|y(x)\|_2 = \left[\int_a^b |y(x)|^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.1-19}$$

$$\|k(x,t)\|_2 = \left[\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.1-20}$$

则有

$$\|y(x)\|_2 \leqslant \|k(x,t)\|_2 \cdot \|\varphi(t)\|_2 \tag{3.1-21}$$

平方可积积分核具有下列性质:

(1) 设 $k_2(x,t)$,$k_1(x,t)$ 均为 L^2 核,则它们的和

$$k(x,t) = k_2(x,t) + k_1(x,t) \tag{3.1-22}$$

仍为 L^2 核。

(2) 设 $k_2(s,x)$，$k_1(x,t)$均为 L^2 核，则它们的合成核

$$k(s,t)=k_2k_1(s,t) \tag{3.1-23}$$

仍为 L^2 核。

(3) 设 $k_2(s,x)$，$k_1(x,t)$均为 L^2 核，则有

$$\|k_2k_1\|_2\leqslant\|k_2\|_2\cdot\|k_1\|_2 \tag{3.1-24}$$

连续核积分方程与平方可积核的积分方程具有相同的性质。以后会看到，对连续核积分方程成立的 Fredholm 定理，对平方可积核的积分方程，也是成立的。

3.2 退化核积分方程

退化核（degenerate kernel）方程是一类特殊的积分方程，它的核 $k(x,t)$可以表示成有限项之和，其中每一项都是两个单变量函数的乘积，一个函数仅依赖变量 x，另一个函数仅依赖变量 t，即

$$k(x,t)=\sum_{i=1}^{N}X_i(x)T_i(t) \tag{3.2-1}$$

式中，$X_i(x)$和 $T_i(t)$均为单变量的平方可积函数，具有此种性质的积分核也称为可分离核或 Pincherle－Goursal 核。其中 N 为有限整数，一般称为核的阶(rank)，即退化核是有限阶核。

研究退化核积分方程，一方面是因为退化核积分方程可直接化成线性代数方程组进行求解，又一方面也因为任意平方可积核都可以用足够高阶的退化核来逼近。

将式(3.2-1)代入下列第Ⅱ类 Fredholm 积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{3.2-2}$$

得

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\Big[\sum_{i=1}^{N}X_i(x)T_i(t)\Big]\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{3.2-3}$$

上式亦可写成

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{i=1}^{N}X_i(x)\int_a^b T_i(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{3.2-4}$$

令

$$\int_a^b T_i(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=c_i \tag{3.2-5}$$

则有

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{i=1}^{N}X_i(x)\cdot c_i=f(x) \tag{3.2-6}$$

式中，$f(x)$和 $X_i(x)$都是已知的，只要知道系数 c_i，积分方程的解 $\varphi(x)$就知道了。为了求得系数 c_i，将式(3.2-6)代入式(3.2-5)中得到关于 c_i 的一组代数方程组

$$\int_a^b T_i(t)f(t)\mathrm{d}t+\lambda\sum_{j=1}^{N}c_j\int_a^b T_i(t)X_j(t)\mathrm{d}t=c_i \tag{3.2-7a}$$

或

$$c_i-\lambda\sum_{j=1}^{N}a_{ij}c_j=f_i \tag{3.2-7b}$$

式中

$$f_i = \int_a^b T_i(t) f(t) \mathrm{d}t$$

$$a_{ij} = \int_a^b T_i(t) X_j(t) \mathrm{d}t$$

若将式(3. 2-6)代入式(3. 2-2)仍可得到式(3. 2-7b)，但与直接代入式(3. 2-5)相比，其导出过程要麻烦一些。将式(3. 2-7b)写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1N} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\lambda a_{N1} & -\lambda a_{N2} & \cdots & 1-\lambda a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \tag{3. 2-8}$$

或简记为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{f} \tag{3. 2-9}$$

记系数矩阵的行列式(determinant)为 $D(\lambda) = |\boldsymbol{A}|$，$\Delta_{ij}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行、第 j 列元素 $\boldsymbol{A}(i,j)$ 对应的代数余子式(cofactor)，则有

$$D(\lambda) = |\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{A}(i,j) \cdot \Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{A}(i,j) \cdot \Delta_{ij} \tag{3. 2-10}$$

又记

$$D_i(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1j-1} & f_1 & -\lambda a_{1j+1} & \cdots & -\lambda a_{1N} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2j-1} & f_2 & -\lambda a_{2j+1} & \cdots & -\lambda a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\lambda a_{N1} & -\lambda a_{N2} & \cdots & -\lambda a_{Nj-1} & f_N & -\lambda a_{Nj+1} & \cdots & 1-\lambda a_{NN} \end{vmatrix} \tag{3. 2-11}$$

则有

$$D_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} f_j \Delta_{ij} \tag{3. 2-12}$$

根据克莱姆(Cramer)法则，线性代数方程组(3. 2-7b)的解有下列性质：

(1) 当 $D(\lambda) \neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$c_i = \frac{D_i(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{\sum_{j=1}^{N} f_j \Delta_{ij}}{D(\lambda)} \tag{3. 2-13}$$

求出 c_i 后，代入式(3. 2-6)可进一步求出积分方程的解 $\varphi(x)$。为此，先求 $\sum_{i=1}^{N} X_i(x) c_i$，从式(3. 2-13)得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} X_i(x) c_i &= \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} f_j \Delta_{ij} X_i(x) \\ &= \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \int_a^b f(t) T_j(t) \mathrm{d}t \cdot \Delta_{ij}(\lambda) X_i(x) \\ &= \frac{1}{D(\lambda)} \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} T_j(t) \Delta_{ij}(\lambda) X_i(x) \right] f(t) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{D(\lambda)} \int_a^b D(x,t;\lambda) f(t) \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3. 2-14}$$

式中

$$D(x,t;\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}T_j(t)\Delta_{ij}(\lambda)X_i(x)$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & -X_1(x) & -X_2(x) & \cdots & -X_N(x) \\ T_1(t) & 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1N} \\ T_2(t) & -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_N(t) & -\lambda a_{N1} & -\lambda a_{N2} & \cdots & 1-\lambda a_{NN} \end{vmatrix} \tag{3.2-15}$$

将式(3.2-14)代入(3.2-6)得积分方程的解为

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b D(x,t;\lambda)f(t)\mathrm{d}t \tag{3.2-16}$$

(2) 当 $D(\lambda)=0$ 时,

1) 当 $\int_a^b T_i(t)f(t)\mathrm{d}t=f_i=0(i=0,1,2,\cdots,N)$ 时,此时方程组(3.2-7b)为齐次的,故方程组除零解(平凡解)外,还有非零解(非平凡解)。设方程组(3.2-9)的系数矩阵的秩为 r,即

$$rank(A)=r \tag{3.2-17}$$

则齐次方程组的解空间维数为 $N-r$,通解可一般的表示为

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix} C_{1,r+1} \\ C_{2,r+1} \\ \vdots \\ C_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix} C_{1,r+2} \\ C_{2,r+2} \\ \vdots \\ C_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+\alpha_{N-r}\begin{pmatrix} C_{1,N} \\ C_{2,N} \\ \vdots \\ C_{r,N} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.2-18}$$

或 $c=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\cdots+\alpha_{N-r}\xi_{N-r}$,其中 $C_{ij}(i=1,2,\cdots,r,j=r+1,\cdots,N)$ 是特定常数,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{N-r}$ 为基础解系。上式表示常数 $c_1,c_2,\cdots,c_N$ 中有 $N-r$ 个可以任意指定,其他系数可由这 $N-r$ 个系数确定。此时,我们称积分方程有 $N-r$ 个特征函数。这 $N-r$ 个特征函数就是对应齐次积分方程的 $N-r$ 个线性无关非零解。由式(3.2-6)知,这 $N-r$ 个特征函数就是 $X_i(x)(i=0,1,2,\cdots,N)$ 中的线性无关的 $N-r$ 个,或者说,齐次积分方程的解表示为特征函数的线性组合。

2) 当 $\int_a^b T_i(t)f(t)\mathrm{d}t=f_i(i=0,1,2,\cdots,N)$ 不全为零时,此时方程组(3.2-7b)是非齐次的,方程组有解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩,即

$$rank(A)=rank(A,f)$$

其通解的一般形式为 $c=c^*+\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\cdots+\alpha_{N-r}\xi_{N-r}$,其中 c^* 为非齐次代数方程的特解,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{N-r}$ 为对应齐次线性代数方程的基础解。由式(3.2-6)知,此时,积分方程的解可表示为 $f(x)$ 与 $N-r$ 个特征函数的线性组合之和。

例 1 解退化核积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}(x\mathrm{ch}t-t\mathrm{sh}x)\varphi(t)\mathrm{d}t=0$$

解:该积分方程为二阶退化核,即

$$X_1(x)=x, X_2(x)=\text{sh}x, T_1(t)=\text{ch}t, T_2(t)=-t$$

设

$$\int_{-1}^{1}\text{ch}t\varphi(t)\text{d}t=c_1, \qquad \int_{-1}^{1}t\varphi(t)\text{d}t=c_2,$$

$$a_{11}=\int_{-1}^{1}t\cdot\text{ch}t\cdot\text{d}t=0, a_{12}=\int_{-1}^{1}\text{ch}t\cdot\text{sh}t\cdot\text{d}t=0,$$

$$a_{21}=\int_{-1}^{1}-t^2\text{d}t=-\frac{2}{3}, a_{22}=\int_{-1}^{1}(-\text{t})\text{sh}t\cdot\text{d}t=-2\text{e}^{-1},$$

则原积分方程化简为

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{2}{3}\lambda & 1+2\lambda\text{e}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

由 $D(\lambda)=1+2\lambda\text{e}^{-1}=0$ 得特征值 $\lambda=-\frac{\text{e}}{2}$。显然,

(1) 当 $\lambda\neq-\frac{\text{e}}{2}$ 时,原积分方程只有零解。

(2) 当 $\lambda=-\frac{\text{e}}{2}$ 时,原积分方程有非零解,$\varphi(x)=c_2\text{sh}x$ 。

例 2 讨论下面的积分方程的可解性

$$\varphi(x)+\lambda\int_0^{2\pi}\sin(x+t)\varphi(t)\text{d}t=f(x) \qquad 0\leqslant x,t\leqslant 2\pi$$

1) $f(x)=1$; 2) $f(x)=x$。

解:积分核

$$k(x,t)=\sin(x+t)=\sin x\cos t+\cos x\sin t$$

是二阶退化核,即

$$X_1(x)=\sin x; X_2(x)=\cos x; T_1(t)=\cos t; T_2(t)=\sin t$$

令

$$c_i=\int_0^{2\pi}T_i(t)\varphi(t)\text{d}t$$

则有

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda c_1\sin x-\lambda c_2\cos x$$

代入原积分方程得

$$[f(x)-\lambda c_1\sin x-\lambda c_2\cos x]+\lambda\int_0^{2\pi}[\sin x\cos t+\cos x\sin t]\cdot[f(t)-\lambda c_1\sin t-\lambda c_2\cos t]\text{d}t=f(x)$$

化简后得:

$$c_i-\lambda\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\cdot c_j=f_i$$

其中

$$f_1=\int_0^{2\pi}\cos t\cdot f(t)\text{d}t, \qquad f_2=\int_0^{2\pi}\sin t\cdot f(t)\text{d}t;$$

$$a_{11}=\int_0^{2\pi}\cos t\sin t\text{d}t=0, \qquad a_{22}=\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\text{d}t=0;$$

$$a_{12}=\int_0^{2\pi}(\cos t)^2\mathrm{d}t=\pi,\qquad a_{21}=\int_0^{2\pi}(\sin t)^2\mathrm{d}t=\pi;$$

或者

$$\begin{pmatrix}1 & -\pi\lambda\\ -\pi\lambda & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}$$

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}1 & -\pi\lambda\\ -\pi\lambda & 1\end{vmatrix}=1-\pi^2\lambda^2$$

令

$$D(\lambda)=0$$

可得特征值 $\lambda_1=\frac{1}{\pi},\lambda_2=-\frac{1}{\pi}$。

(1) 当 $\lambda\neq\pm\frac{1}{\pi}$ 时，积分方程有唯一解。

$$D(x,t,\lambda)=\begin{vmatrix}0 & -\sin x & -\cos x\\ \cos t & 1 & -\pi\lambda\\ \sin t & -\pi\lambda & 1\end{vmatrix}$$

$$=\pi\lambda[\sin x\sin t+\cos x\cos t]+\cos x\sin t+\cos t\sin x$$

$$=\pi\lambda\cos(x-t)+\sin(x+t)$$

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{\lambda}{1-\pi^2\lambda^2}\int_0^{2\pi}[\sin(x+t)+\pi\lambda\cos(x-t)]f(t)\mathrm{d}t$$

(2) 当 $\lambda=\pm\frac{1}{\pi}$ 时，

1) $f(x)=1$ 时，

$$f_1=\int_0^{2\pi}\cos t\mathrm{d}t=0\ ,f_2=\int_0^{2\pi}\sin t\mathrm{d}t=0$$

关于系数 c_1,c_2 的线性代数方程组为

$$\begin{pmatrix}1 & \pm1\\ \pm1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\ 即\ c_1=\pm c_2$$

积分方程的解为

$$\varphi_1(x)=1\pm c_2\sin x+c_2\cos x$$

2) $f(x)=x$ 时，

$$f_1=\int_0^{2\pi}t\cos t\mathrm{d}t=0,f_2=\int_0^{2\pi}t\sin t\mathrm{d}t=-2\pi$$

关于系数 c_1,c_2 的线性代数方程组为

$$\begin{pmatrix}1 & \pm1\\ \pm1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -2\pi\end{pmatrix}$$

上述方程组无解，故积分方程也无解。

3.3 逐次逼近法

考虑一般连续核的第Ⅱ类 Fredholm 积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x)\tag{3.3-1}$$

上式可改写成

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{3.3-2}$$

当λ足够小时，上式右端第2项也变得很小，因而可近似取$f(x)$作为$\varphi(x)$的零次近似，即

$$\varphi_0(x)=f(x) \tag{3.3-3}$$

将上式代入式(3.3-2)对零次近似进行修正后，可得$\varphi(x)$的一次近似

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi_0(t)\mathrm{d}t=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)f(t)\mathrm{d}t \tag{3.3-4}$$

再将式(3.3-4)代入(3.3-2)对一次近似修正后，可得$\varphi(x)$的二次近似

$$\begin{aligned}\varphi_2(x)&=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,s)\varphi_1(s)\mathrm{d}t\\&=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,s)\left[f(s)+\lambda\int_a^b k(s,t)f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s\\&=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)f(t)\mathrm{d}t+\lambda^2\int_a^b\int_a^b k(x,s)k(s,t)f(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\&=f(x)+\lambda\int_a^b k_1(x,t)f(t)\mathrm{d}t+\lambda^2\int_a^b k_2(x,t)f(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.3-5}$$

式中

$$k_1(x,t)=k(x,t) \tag{3.3-6}$$

$$k_2(x,t)=\int_a^b k(x,s)k(s,t)\mathrm{d}s=\int_a^b k_1(x,s)k_1(s,t)\mathrm{d}s \tag{3.3-7}$$

依此类推，可得$\varphi(x)$的n次近似

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k_1(x,t)f(t)\mathrm{d}t+\lambda^2\int_a^b k_2(x,t)f(t)\mathrm{d}t+\cdots+\lambda^n\int_a^b k_n(x,t)f(t)\mathrm{d}t \tag{3.3-8}$$

式中

$$k_n(x,t)=\int_a^b k_1(x,s)k_{n-1}(s,t)\mathrm{d}s \tag{3.3-9}$$

上述$\varphi(x)$的各次近似构成一个函数系列

$$\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots\} \tag{3.3-10}$$

若这个函数序列有极限，即当$n\to\infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)$存在。则这个极限就是待求积分方程(3.3-1)的解，即

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x) \tag{3.3-11}$$

下面讨论上述极限存在的条件，由于$k(x,t)$为连续核，故有

$$|k(x,t)|=|k_1(x,t)|\leqslant A(\text{有限常数}) \tag{3.3-12a}$$

$$|k_2(x,t)|\leqslant\int_a^b|k_1(x,s)k_1(s,t)|\mathrm{d}s\leqslant A^2(b-a) \tag{3.3-12b}$$

$$|k_3(x,t)|\leqslant\int_a^b|k_1(x,s)k_2(s,t)|\mathrm{d}s\leqslant A^3(b-a)^2 \tag{3.3-12c}$$

$$\vdots$$

$$|k_n(x,t)|\leqslant\int_a^b|k_1(x,s)k_{n-1}(s,t)|\mathrm{d}s\leqslant A^n(b-a)^{n-1} \tag{3.3-12d}$$

进一步可推出

$$\left|\int_a^b k_n(x,t)f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant A^n\ (b-a)^{n-1}\int_a^b\ |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant A^n B\ (b-a)^n \tag{3.3-13}$$

其中，B 为连续函数 $f(x)$在$[a,b]$区间的上确界，即

$$B=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \tag{3.3-14}$$

根据数项级数的达朗贝尔判别法，当 λ 满足

$$|\lambda|<\frac{1}{A(b-a)} \tag{3.3-15}$$

时，数项级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} BA^i\ (b-a)^i\ |\lambda|^i \tag{3.3-16}$$

是收敛的。又数项级数(3.3-16)是函数项级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i\psi_i(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^i\int_a^b k_i(x,t)f(t)\mathrm{d}t \tag{3.3-17}$$

的强级数，故在条件(3.3-15)下，函数项级数(3.3-17)也是收敛的。因此有下列定理

定理 3.3-1 对于连续函数 $f(x)$及连续核 $k(x,t)$，记

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|=B,\ \sup_{a\leqslant x,t\leqslant b}|k(x,t)|=A$$

在条件

$$|\lambda|<\frac{1}{A(b-a)}$$

下，逐次逼近法所得函数序列$\{\varphi_n(t)\}$在区间$[a,b]$上一致收敛于积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

的解 $\varphi(x)$。

对式(3.3-8)稍作修改，还可以将积分方程的解写成下列两种形式

(1) Neumann 级数形式

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i(x)\lambda^i \tag{3.3-18}$$

式中

$$\psi_i(x)=\int_a^b k_i(x,t)f(t)\mathrm{d}t,\ (i=1,2,\cdots) \tag{3.3-19}$$

(2) 解核表示形式

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t=f+\lambda\mathbf{R}f \tag{3.3-20}$$

式中

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}k_i(x,t) \tag{3.3-21}$$

一般称为积分方程的解核(solving kernel)或预解核(resolvent kernel)。积分算子

$$\mathbf{R}=\int_a^b R(x,t,\lambda)\mathrm{d}t$$

称为积分方程的预解(resolvent)，而称

$$k_n(x,t) = \int_a^b k_1(x,s)k_{n-1}(s,t)\mathrm{d}t \tag{3.3-22}$$

为积分方程的 n 次迭核(iterated kernel)。

解核具有下列性质

$$R(x,t,\lambda) = k(x,t) + \lambda \int_a^b k(x,s)R(s,t,\lambda)\mathrm{d}s \tag{3.3-23a}$$

$$R(x,t,\lambda) = k(x,t) + \lambda \int_a^b k(s,t)R(x,s,\lambda)\mathrm{d}s \tag{3.3-23b}$$

此外,由于

$$\varphi = f + \lambda \mathbf{R} f = (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R}) f \tag{3.3-24}$$

式中,$\mathbf{I}$ 为恒等算子(identity operator),满足

$$\mathbf{I}\varphi = \varphi \tag{3.3-25}$$

若将式(3.3-24)代入积分方程

$$\varphi = f + \lambda \mathbf{K}\varphi \tag{3.3-26a}$$

或

$$(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{K})\varphi = f \tag{3.3-26b}$$

得

$$(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{K})(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R}) f = f \tag{3.3-27a}$$

化简得

$$\mathbf{R} - \mathbf{K} = \lambda \mathbf{K}\mathbf{R} \tag{3.3-28a}$$

若将式(3.3-26b)代入式(3.3-24)得

$$(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{R})(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{K})\varphi = \varphi \tag{3.3-27b}$$

化简得

$$\mathbf{R} - \mathbf{K} = \lambda \mathbf{R}\mathbf{K} \tag{3.3-28b}$$

称上述算子方程(3.3-28)为预解方程。利用预解方程可以证明下述重要结论,即如果对于给定 λ,积分方程的预解核存在,则预解核是唯一的。设有两个预解核 $\mathbf{R}_1$ 和 $\mathbf{R}_2$,则有

$$\mathbf{R}_1 - \mathbf{K} = \lambda \mathbf{K}\mathbf{R}_1 \tag{3.3-29}$$

$$\mathbf{R}_2 - \mathbf{K} = \lambda \mathbf{K}\mathbf{R}_2 \tag{3.3-30}$$

两式相减得

$$\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 = \lambda \mathbf{K}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \tag{3.3-31}$$

令

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 \tag{3.3-32}$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma} &= \lambda \mathbf{K}\mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{R}_1\mathbf{\Gamma} &= \lambda \mathbf{R}_1\mathbf{K}\mathbf{\Gamma} \\ &= (\mathbf{R}_1 - \mathbf{K})\mathbf{\Gamma} \\ &= \mathbf{R}_1\mathbf{\Gamma} - \mathbf{K}\mathbf{\Gamma} \end{aligned}$$

故

$$\mathbf{K}\mathbf{\Gamma} = \mathbf{K}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_1) = 0 \tag{3.3-33}$$

即

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 \tag{3.3-34}$$

而对于迭核,我们可归纳如下性质:

1) 连续核的 n 次迭核仍为连续核。

2) 对称核,即 $k(x,t) = k(t,x)$ 的 n 次迭核仍为对称核,即

$$k_n(x,t)=k_n(t,x) \tag{3.3-35}$$

3）迭核的一般表达式为

$$k_n(x,t)=\int_a^b\cdots\int_a^b k(x,s_1)k(s_1,s_2)\cdots k(s_{n-1},t)\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\cdots\mathrm{d}s_{n-1} \tag{3.3-36}$$

4）n 次迭核满足：

$$k_n(x,t)=\int_a^b k_p(x,s)k_q(s,t)\mathrm{d}s,(n=p+q) \tag{3.3-37}$$

现在考虑第Ⅱ类 Volterra 积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{3.3-38}$$

类似于对 Fredholm 积分方程的逐次逼近过程得

$$\varphi_0(x)=f(x)$$

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)\varphi_0(t)\mathrm{d}t=f(x)+\lambda\int_a^x k_1(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

$$\varphi_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)f(t)\mathrm{d}t+\lambda^2\int_a^x\int_a^t k(x,s)k(s,t)f(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^x k_1(x,t)f(t)\mathrm{d}t+\lambda^2\int_a^x k_2(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

$$\vdots$$

由于 $k(x,t)$ 是连续核，故有

$$|\psi_0(x)|=|f(x)|\leqslant B\quad（有限常数）$$

$$|\psi_1(x)|=\left|\int_a^x k_1(x,t)f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant AB\left|\int_a^x\mathrm{d}t\right|=AB(x-a)$$

$$|\psi_2(x)|=\left|\int_a^x \psi_1(s)k(x,s)\mathrm{d}s\right|\leqslant A^2B\int_a^x(s-a)\mathrm{d}s=A^2B\frac{(x-a)^2}{2!}$$

$$|\psi_3(x)|=\left|\int_a^x \psi_2(s)k(x,s)\mathrm{d}s\right|\leqslant\frac{A^3B}{2!}\int_a^x(s-a)^2\mathrm{d}s=A^3B\frac{(x-a)^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$|\psi_n(x)|\leqslant\frac{A^nB}{(n-1)!}\int_a^x(s-a)^{n-1}\mathrm{d}s=\frac{A^nB\ (x-a)^n}{n!}$$

因此，

$$\left|\sum_{i=0}^N\lambda^i\psi_i(x)\right|\leqslant\sum_{i=0}^N\frac{|\lambda|^iA^i\ (b-a)^i}{i!}=\mathrm{e}^{|\lambda|A(b-a)} \tag{3.3-39}$$

可见，对任意 λ 值，Neumann 级数都是收敛，也就是说，对第Ⅱ类 Volterra 积分方程，不论 λ 取值如何，逐次逼近方法总是收敛的。而对第Ⅱ类 Fredholm 积分方程，只有在 λ 是较小时，逐次逼近法才是收敛的。

例 3 求解积分方程

$$\varphi(x)=1+\lambda\int_0^1 xt\varphi(t)\mathrm{d}t,(0\leqslant x\leqslant 1)$$

解：积分核 $k(x,t)=xt$

$$k_1(x,t)=xt$$

$$k_2(x,t)=\int_0^1 k_1(x,s)k_1(s,t)\mathrm{d}s=\int_0^1(xt)s^2\mathrm{d}s=\frac{xt}{3}$$

$$k_3(x,t)=\int_0^1 k_1(x,s)k_2(s,t)\mathrm{d}s=\frac{xt}{3}\int_0^1 s^2\mathrm{d}s=\frac{xt}{3^2}$$

$$\vdots$$

$$k_n(x,t)=\frac{xt}{3^{n-1}}$$

解核

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}k_i(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}\frac{xt}{3^{i-1}}$$

$$=xt\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{i-1}=\frac{xt}{1-\lambda/3},(|\lambda|<3)$$

故积分方程的解为

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1 R(x,t,\lambda)f(t)\mathrm{d}t$$

$$=1+\frac{\lambda x}{1-\lambda/3}\int_0^1 t\mathrm{d}t$$

$$=1+\frac{3\lambda x}{2(3-\lambda)},(|\lambda|<3)$$

例 4 求解积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

式中，$k(x,t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x-t},x\geqslant t\\0,x<t\end{cases}$

解：

$$k_1(x,t)=\mathrm{e}^{x-t},(x\geqslant t)$$

$$k_2(x,t)=\int_t^x k(x,s)k(s,t)\mathrm{d}s$$

$$=\int_t^x \mathrm{e}^{x-s}\mathrm{e}^{s-t}\mathrm{d}s$$

$$=\mathrm{e}^{x-t}\int_t^x \mathrm{d}s$$

$$=(x-t)\mathrm{e}^{x-t},(x\geqslant t)$$

$$k_3(x,t)=\int_t^x k(x,s)k_2(s,t)\mathrm{d}s$$

$$=\int_t^x \mathrm{e}^{x-s}(s-t)\mathrm{e}^{s-t}\mathrm{d}s$$

$$=\mathrm{e}^{x-t}\int_t^x (s-t)\mathrm{d}s$$

$$=\frac{(x-t)^2}{2}\mathrm{e}^{x-t}$$

用归纳法可得：

$$k_n(x,t)=\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{x-t}$$

解核

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}k_i(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}\frac{(x-t)^{i-1}}{(i-1)!}\mathrm{e}^{x-t}=\mathrm{e}^{(\lambda+1)(x-t)}$$

故积分方程的解为

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{(\lambda+1)(x-t)}\mathrm{d}t$$

3.4 Fredholm 方法

Fredholm 方法的基本思想是将积分运算通过离散化近似处理成求和运算，从而将积分方程化成线性代数方程组进行求解。为此，设有 n 个分点 t_i 或 x_i，$(i=1,2,\cdots,n)$，将区间 $[a,b]$ 分成 n 等份（设 $t_n=x_n=b$），每等份长度为

$$h=\frac{b-a}{n} \tag{3.4-1}$$

将积分运算近似用求和运算代替后，连续核积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{3.4-2}$$

变成

$$\varphi(x)-\lambda h\sum_{j=1}^{n}k(x,t_j)\varphi(t_j)=f(x) \tag{3.4-3}$$

依次代入 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 得线性代数方程组

$$\varphi(x_i)-\lambda h\sum_{j=1}^{n}k(x_i,t_j)\varphi(t_j)=f(x_i),(i=1,2,\cdots,n) \tag{3.4-4}$$

令

$$\varphi_i=\varphi(x_i);\quad f_i=f(x_i);\quad k_{ij}=k(x_i,t_j)$$

则有

$$\varphi_i-\lambda h\sum_{j=1}^{n}k_{ij}\varphi_j=f_i,(i=1,2,\cdots,n) \tag{3.4-5}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}1-\lambda hk_{11} & -\lambda hk_{12}\cdots & -\lambda hk_{1n}\\ -\lambda hk_{21} & 1-\lambda hk_{22}\cdots & -\lambda hk_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -\lambda hk_{n1} & -\lambda hk_{n2}\cdots & 1-\lambda hk_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix} \tag{3.4-6}$$

这里用 $D_n(\lambda)$ 表示系数矩阵的行列式，即

$$D_n(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda hk_{11} & -\lambda hk_{12} & \cdots & -\lambda hk_{1n}\\ -\lambda hk_{21} & 1-\lambda hk_{22}\cdots & & -\lambda hk_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\lambda hk_{n1} & -\lambda hk_{n2} & \cdots & 1-\lambda hk_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=1-\lambda\sum_{i=1}^{n}hk_{ii}+\frac{\lambda^2}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h^2\begin{vmatrix}k_{ii} & k_{ij}\\ k_{ji} & k_{jj}\end{vmatrix}-$$

$$\frac{\lambda^3h^3}{3!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\begin{vmatrix}k_{ii} & k_{ij} & k_{il}\\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jl}\\ k_{li} & k_{lj} & k_{ll}\end{vmatrix}+\cdots \tag{3.4-7}$$

用 $D_n(x_i,t_j;\lambda)$ 表示第 i 行，第 j 列元素的代数余子式，即

$$D_n(x_i,t_j;\lambda)=\lambda hk_{ij}-\lambda^2\sum_{l=1}^{n}h^2\begin{vmatrix}k_{ij} & k_{il}\\ k_{lj} & k_{ll}\end{vmatrix}+\frac{\lambda^3h^3}{2!}\sum_{l=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\begin{vmatrix}k_{ij} & k_{il} & k_{ip}\\ k_{lj} & k_{ll} & k_{lp}\\ k_{pj} & k_{ipl} & k_{pp}\end{vmatrix}+\cdots \tag{3.4-8}$$

对满足 $D_n(\lambda)\neq 0$ 的一切 λ 值，线性代数方程组(3.4-6)的解可表示为

$$\varphi_i=\frac{1}{D_n(\lambda)}\sum_{j=1}^{n}D_n(x_i,t_j;\lambda)f_j,(i=1,2,\cdots,n) \tag{3.4-9}$$

这样得到的 $\varphi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 只是积分方程的数值解，而积分方程的解析解可看成这样的数值解在 $n\to\infty$ 时的极限。为此，首先来研究 $D_n(\lambda)$ 和 $D_n(x_i,t_j;\lambda)$ 的极限形式。从式(3.4-7)和式(3.4-8)可以看出 $D_n(\lambda)$ 和 $D_n(x_i,t_j;\lambda)$ 在 $n\to\infty$ 时的极限形式为

$$D(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}C_m\lambda^m \tag{3.4-10}$$

$$D(x,t;\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}B_m(x,t)\lambda^m \tag{3.4-11}$$

式中

$$C_0=1 \tag{3.4-12a}$$

$$C_m=\int_a^b\cdots\int_a^b\begin{vmatrix}k(t_1,t_1) & \cdots & k(t_1,t_m)\\ \vdots & \ddots & \cdots\\ k(t_m,t_1) & \cdots & k(t_m,t_m)\end{vmatrix}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_m \tag{3.4-12b}$$

$$B_0(x,t)=k(x,t) \tag{3.4-13a}$$

$$B_m(x,t)=\int_a^b\cdots\int_a^b\begin{vmatrix}k(x,t) & k(x,t_1) & \cdots & k(x,t_m)\\ k(t_1,t) & k(t_1,t_1) & \cdots & k(t_1,t_m)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k(t_m,t) & k(t_m,t_1) & \cdots & k(t_m,t_m)\end{vmatrix}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_m \tag{3.4-13b}$$

为简化表示，可引入记号

$$k\begin{pmatrix}x_1,x_2,\cdots,x_m\\ s_1,s_2,\cdots,s_m\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}k(x_1,s_1) & k(x_1,s_2) & \cdots & k(x_1,s_m)\\ k(x_2,s_1) & k(x_2,s_2) & \cdots & k(x_1,s_m)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k(x_m,s_1) & k(x_m,s_2) & \cdots & k(x_m,s_m)\end{vmatrix} \tag{3.4-14}$$

进一步从 C_m 和 $B_m(x,t)$ 的表达式还可导出二者之间存在下列关系

$$C_{m+1}=\int_a^b B_m(t,t)\mathrm{d}t \tag{3.4-15}$$

$$B_m(x,t)=C_mk(x,t)-m\int_a^b k(x,u)B_{m-1}(u,t)\mathrm{d}u \tag{3.4-16}$$

注意到式(3.4-15)与式(3.4-16)连同 $C_0=1$，$B_0(x,t)=k(x,t)$ 构成关于系数 C_m 和 $B_m(x,t)$ 的递推关系。事实上，利用递推关系求系数 C_m 和 $B_m(x,t)$ 比按其表达式(3.4-12b)和式(3.4-13b)要方便得多。由于系数 C_m 和系数 $B_m(x,t)$ 之间存在如式(3.4-15)和式(3.4-16)这样

的关系，因此，$D(\lambda)$与$D(x,t;\lambda)$之间也必然存在某种联系。事实上有

$$D(x,t;\lambda)=D(\lambda)k(x,t)+\lambda\int_a^b k(x,s)D(s,t;\lambda)\mathrm{d}s \tag{3.4-17}$$

$$D(x,t;\lambda)=D(\lambda)k(x,t)+\lambda\int_a^b k(s,t)D(x,s;\lambda)\mathrm{d}s \tag{3.4-18}$$

$$D'(\lambda)=-\int_a^b D(t,t;\lambda)\mathrm{d}t \tag{3.4-19}$$

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=-\sum_{n=0}^{\infty}d_{n+1}\lambda^n \tag{3.4-20}$$

式中 $d_1=\int_a^b k(t,t)\mathrm{d}t$,

$$d_2=\int_a^b\int_a^b k(t,t_1)k(t_1,t)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t,$$

$$\vdots$$

$$d_n=\int_a^b\cdots\int_a^b k(t,t_1)k(t_1,t_2)\cdots k(t_{n-1},t)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_{n-1}\mathrm{d}t$$

称为积分核$k(x,t)$的n阶迹(trace)。利用这些关系式可以得到关于积分方程解的一个重要结论。用$\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$乘方程

$$f(t)=\varphi(t)-\lambda\int_a^b k(t,t_1)\varphi(t_1)\mathrm{d}t_1 \tag{3.4-21}$$

两边，再关于t从a到b积分，

$$\begin{aligned}\lambda\int_a^b\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}f(t)\mathrm{d}t&=\lambda\int_a^b\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}\varphi(t)\mathrm{d}t-\lambda\int_a^b\left[\lambda\int_a^b k(t,t_1)\varphi(t_1)\mathrm{d}t_1\right]\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}\mathrm{d}t\\&=\frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b D(x,t;\lambda)\varphi(t)\mathrm{d}t-\frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b\left[\lambda\int_a^b D(x,t;\lambda)k(t,t_1)\mathrm{d}t\right]\varphi(t_1)\mathrm{d}t_1\\&=\frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b D(x,t;\lambda)\varphi(t)\mathrm{d}t-\frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b\left[D(x,t_1;\lambda)-D(\lambda)k(x,t_1)\right]\varphi(t_1)\mathrm{d}t_1\\&=\lambda\int_a^b k(x,t_1)\varphi(t_1)\mathrm{d}t_1\\&=\varphi(x)-f(x)\end{aligned} \tag{3.4-22}$$

即
$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}f(t)\mathrm{d}t \tag{3.4-23}$$

因此有如下定理。

定理 3.4-1 对于连续核积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

当$f(x)$为$[a,b]$上的连续函数，且参数λ满足$D(\lambda)\neq 0$，则方程有唯一解

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}f(t)\mathrm{d}t$$

这种求解积分方程的方法首先是由 Fredholm 提出的，通常称$D(\lambda)$为 Fredholm 行列式(determinant)，称$D(x,t,\lambda)$为 Fredholm 一阶子式(first Fredholm minor)，称式(3.4-17)和式(3.4-18)为 Fredholm 基本关系式。

例 5 $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 (x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x)$

解：

$$C_0=1, B_0(x,t)=k(x,t)=x+t$$

$$C_1=\int_0^1 B_0(t,t)\mathrm{d}t=\int_0^1 2t\mathrm{d}t=1$$

$$B_1(x,t)=C_1k(x,t)-\int_0^1 k(x,u)B_0(u,t)\mathrm{d}u$$

$$=(x+t)-\int_0^1 (x+u)(u+t)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}(x+t)-xt-\frac{1}{3}$$

$$C_2=\int_0^1 B_1(t,t)\mathrm{d}t=\int_0^1 \left(t-t^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}t=-\frac{1}{6}$$

$$B_2(x,t)=C_2k(x,t)-2\int_0^1 k(x,u)B_1(u,t)\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{6}(x+t)-2\int_0^1 (x+u)\left[\frac{1}{2}(u+t)-ut-\frac{1}{3}\right]\mathrm{d}u=0$$

$$C_3=C_4=\cdots=0$$

$$B_3(x,t)=B_4(x,t)=\cdots=0$$

故

$$D(\lambda)=1-\lambda-\frac{\lambda^2}{12}$$

$$D(x,t;\lambda)=x+t-\left[\frac{1}{2}(x+t)-xt-\frac{1}{3}\right]\lambda$$

原积分方程的解为

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1 \frac{x+t-\left[\frac{1}{2}(x+t)-xt-\frac{1}{3}\right]\lambda}{1-\lambda-\frac{\lambda^2}{12}}f(t)\mathrm{d}t$$

例 6 $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \mathrm{e}^{x+t}\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x)$

解：

$$C_0=1, B_0(x,t)=k(x,t)=\mathrm{e}^{x+t}$$

$$C_1=\int_0^1 B_0(t,t)\mathrm{d}t=\int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^2)$$

$$B_1(x,t)=C_1k(x,t)-\int_0^1 k(x,u)B_0(u,t)\mathrm{d}u$$

$$=-\mathrm{e}^{x+t}\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^2)-\int_0^1 \mathrm{e}^{x+2u+t}\mathrm{d}u=0$$

$$C_2=C_3=\cdots=0$$

$$B_1(x,t)=B_2(x,t)=\cdots=0$$

故

$$D(\lambda)=1-\frac{\lambda}{2}(\mathrm{e}^2-1)$$

$$D(x,t,\lambda)=\mathrm{e}^{x+t}$$

原积分方程的解为

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1\frac{2\mathrm{e}^{x+t}}{2-\lambda(\mathrm{e}^2-1)}f(t)\mathrm{d}t$$

3.5 Fredholm 定理

定理 3.4－1 给出了 $D(\lambda)\neq 0$ 条件下非齐次积分方程的解，但对于 $D(\lambda)=0$ 的情况又怎么样呢？事实上，在这种情况下，非齐次方程可能无解，也可能有无限多解。下面重点讨论方程的可解性条件。为此，让我们首先引入几个概念。

定义 3.5-1 使齐次积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0 \tag{3.5-1}$$

或

$$\varphi-\lambda\mathbf{K}\varphi=0 \tag{3.5-2}$$

有非平凡解（非零解）的 λ 值称为齐次积分方程的特征值（characteristic values or eigenvalues），相应的非平凡解称为齐次积分的特征函数（characteristic function or eigenfunctions）。与此相对应，我们将使积分方程仅有平凡解的 λ 值称为积分方程的正则值（regular values），所有正则值组成的集合称为预解集 Ω（the resolvent set）。预解集的补集（complement set）称为谱（spectrum）Σ。

定义 3.5-2 齐次积分方程(3.5-1)的共轭齐次方程（adjoint equation）是指

$$\psi(x)-\bar{\lambda}\int_a^b \overline{k(t,x)}\psi(t)\mathrm{d}t=0 \tag{3.5-3}$$

或

$$\psi-\bar{\lambda}\mathbf{K}^*\psi=0 \tag{3.5-4}$$

式中，$\overline{k(t,x)}$是把原积分核 $k(x,t)$ 中的自变量互换，再取复共轭，称为核 $k(x,t)$ 的共轭核（adjoint kernel），即 $K^*=\int_a^b[\overline{k(t,x)}]\mathrm{d}t$。

特征值与特征函数具有下列性质：

(1) 对于任意不为 0 的常数 c，若 $\varphi(x)$是特征值 λ 对应的特征函数，则 $c\varphi(x)$也是 λ 的对应特征函数。由于 c 的任意性，我们特别规定，满足条件

$$\|c\varphi(x)\|=\sqrt{\int_a^b c^2\varphi^2(x)\mathrm{d}x}=1 \tag{3.5-5}$$

的特征函数 $c\varphi(x)$为标准特征函数，今后提到特征函数我们一般是指标准特征函数。

(2) 对于任意不为 0 的常数 c_1 和 c_2，若 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$是对应同一特征值 λ 的特征函数，则

$$\varphi(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x) \tag{3.5-6}$$

也是对应特征值 λ 的特征函数。这样，我们可以构造无限多个特征函数。为此，引入标准正交特征函数系。设

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$$

是一组对应特征值 λ 的标准特征函数，若对应 λ 的任一特征函数均可由这组函数的线性组合表示，即

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x) \tag{3.5-7}$$

并且，这组函数系中两两正交，即

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\int_a^b \varphi_i(x)\overline{\varphi_j(x)}\mathrm{d}x=\begin{cases}0,(i\neq j)\\1,(i=j)\end{cases} \tag{3.5-8}$$

则称这组函数系为对应 λ 的标准正交特征函数系，它构成特征函数空间的一个正交基。

(3) 对应同一特征值 λ 的标准正交特征函数系的个数是有限的，称为特征值 λ 的秩。

关于特征值与特征函数有下面的定理，这些定理在大多数的积分方程的教材中都有详细的证明，这里略去这些定理的证明。

定理 3.5-1 $D(\lambda)$的所有零点都是齐次积分方程(3.5-1)的特征值，反过来，齐次积分方程(3.5-1)的特征值都是 $D(\lambda)$的零点。

定理 3.5-2 若 λ 是齐次积分方程(3.5-1)的特征值，则 $\bar{\lambda}$ 就是共轭齐次积分方程(3.5-3)的特征值。因此，齐次积分方程与其共轭积分方程或者同时有平凡解(当 λ 不是特征值时)，或者同时有非平凡解(当 λ 是特征值时)。

定理 3.5-3 齐次积分方程(3.5-1)对应特征值 λ 的标准正交特征函数的个数，与共轭齐次积分方程(3.5-3)对应特征值 $\bar{\lambda}$ 的标准正交特征函数个数是相同的。

关于互为共轭的算子 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{K}^*$ 有下列两个性质：

$$(\mathbf{K}\varphi,\psi)=(\varphi,\mathbf{K}^*\psi) \tag{3.5-9}$$

$$(\mathbf{KL}\varphi,\psi)=(\mathbf{L}\varphi,\mathbf{K}^*\psi)=(\varphi,\mathbf{L}^*\mathbf{K}^*\psi) \tag{3.5-10}$$

现在回到非齐次积分方程(3.4-2)的可解性问题上来，Fredholm 通过系统的研究，建立了关于可解性的基本理论，这些理论可归结为下面三个定理，统称为 Fredholm 备择定理(Fredholm alternatives)，或简称 Fredholm 定理。

定理 3.5-4 若 λ 不是积分方程的特征值，即 $D(\lambda)\neq 0$，则齐次积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0 \tag{3.5-11}$$

只有平凡解(零解)。而非齐次积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{3.5-12}$$

存在唯一解

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)}f(t)\mathrm{d}t \tag{3.5-13}$$

定理 3.5-5 对于给定的 λ 值，齐次积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0 \tag{3.5-14}$$

与共轭齐次积分方程

$$\psi(x)-\bar{\lambda}\int_a^b \overline{k(t,x)}\psi(t)\mathrm{d}t=0 \tag{3.5-15}$$

或者都只有平凡解(零解)，或者都具有非平凡解(非零解)，且两组非平凡解的标准正交函数系

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$$
$$\psi_1(x),\psi_2(x),\cdots,\psi_n(x)$$

的个数相同(n 个)。

定理 3.5-6 若λ是积分方程的特征值，则齐次积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0 \tag{3.5-16}$$

除平凡解 $\varphi(x)=0$ 外，还有非平凡解，且可由有限个标准正交特征函数

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$$

的线性组合来表示，即

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x) \tag{3.5-17}$$

而非齐次积分方程，可能无解，也可能有无限多解。其可解的充分必要条件是

$$\int_a^b f(x)\overline{\psi_i(x)}\mathrm{d}t=0\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{3.5-18}$$

式中，$\psi_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$是共轭齐次积分方程的标准正交特征函数系，且解可一般表示为

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x)+\varphi^*(x) \tag{3.5-19}$$

式中，$\varphi_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$为齐次方程的标准正交特征函数系，$\varphi^*(x)$为非齐次积分方程的特解。

上述定理的证明比较烦琐，这里仅给出 Fredholm 第三定理的必要性证明：设 $\psi_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$是共轭齐次积分方程的标准正交特征函数系，$\varphi(x)$是非齐次积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{3.5-20}$$

的解。两边同乘以 $\psi_k(x)$并作从 a 到 b 的积分得

$$\begin{aligned}(f,\psi_k)&=(\varphi-\lambda\mathbf{K}\varphi,\psi_k)=(\varphi,\psi_k)-(\lambda\mathbf{K}\varphi,\psi_k)\\&=(\varphi,\psi_k)-(\varphi,\bar{\lambda}\mathbf{K}^*\psi_k)\\&=(\varphi,\psi_k)-(\varphi,\psi_k)\\&=0\end{aligned}$$

证毕。

上述 Fredholm 定理，系统建立了齐次和非齐次连续核积分方程的可解性条件和解的表达式。事实上，这些定理不仅适用于连续核积分方程，而且稍加修正，也适合于平方可积核的积分方程，以及弱奇性的积分方程。

例 7 $\varphi(x)-\lambda\int_0^1(5x^2-3)t^2\varphi(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x$

解：令

$$c=\int_0^1 t^2\varphi(t)\mathrm{d}t$$

则原积分方程化为

$$\varphi(x)=\mathrm{e}^x+\lambda(5x^2-3)c$$

将之代入

$$c=\int_0^1 t^2\varphi(t)\mathrm{d}t$$

得

$$c=c\lambda\int_0^1(5t^4-3t^2)\mathrm{d}t+\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

即对任意 λ 值有

$$c=\int_0^1 t^2 e^t dt = e-2$$

所以积分方程的解为

$$\varphi(x)=\lambda(e-2)(5x^2-3)+e^x$$

例 8 $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 x\varphi(t)dt = 2x$

解:令 $$c=\int_0^1 \varphi(t)dt$$

则原积分方程化为 $$\varphi(x)=c\lambda x+2x$$

将之代入 $$c=\int_0^1 \varphi(t)dt$$

得 $$c=c\lambda\int_0^1 t dt+1$$

即 $$c\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)=1$$

当 $\lambda\neq 2$ 时,原积分方程有唯一解

$$\varphi(x)=\frac{2\lambda}{2-\lambda}x+2x$$

当 $\lambda=2$ 时,c 不存在,故原积分方程无解。

也可以这样理解:当 $\lambda=2$ 时,对应此特征值的特征函数是 $\varphi(x)=x$。相连共轭齐次方程的特征值和特征函数也为:$\lambda=2$ 和 $\psi(x)=x$。因为

$$\int_0^1 \psi(x)f(x)dx=\int_0^1 2x^2 dx=\frac{2}{3}\neq 0$$

所以,原积分方程无解。

例 9 $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos(x+t)\varphi(t)dt=\cos 3x$

解:考虑到

$$\cos(x+t)=\cos x\cos t-\sin x\sin t$$

令 $$c_1=\int_0^{\pi}\cos t\varphi(t)dt,\ c_2=\int_0^{\pi}\sin t\varphi(t)dt$$

则原积分方程化为

$$\varphi(x)=c_1\lambda\cos x-c_2\lambda\sin x+\cos 3x$$

再将之代回 c_1,c_2 的表达式得

$$c_1\left(1-\lambda\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$c_2\left(1+\lambda\frac{\pi}{2}\right)=0$$

当 $\lambda\neq\pm\frac{2}{\pi}$ 时,原积分方程有唯一解

$$\varphi(x)=\cos 3x$$

当 $\lambda=\frac{2}{\pi}$ 时,相应特征函数为

$$\varphi_1(x)=\cos x$$

当 $\lambda=-\frac{2}{\pi}$ 时，相应特征函数为

$$\varphi_2(x)=\sin x$$

共轭齐次方程

$$\psi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos(t+x)\psi(t)\mathrm{d}t=0$$

的特征函数为

$$\psi_1(x)=\cos x$$
$$\psi_2(x)=\sin x$$

由于

$$\int_0^{\pi}\cos 3x\cos x\mathrm{d}x=0$$
$$\int_0^{\pi}\cos 3x\sin x\mathrm{d}x=0$$

所以，原非齐次积分方程有解。当 $\lambda=\frac{2}{\pi}$ 时，$\varphi(x)=c_1\cos x+\cos 3x$；当 $\lambda=-\frac{2}{\pi}$ 时，$\varphi(x)=c_2\sin x+\cos 3x$。

习　题

1. 求下列退化核方程的解

(1) $\varphi(x)-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\varphi(t)}{1+\cos 2t}\mathrm{d}t=0$　　答案：$\varphi(x)=c$

(2) $\varphi(x)+6\int_0^1(x^2-2xt)\varphi(t)\mathrm{d}t=0$　　答案：$\varphi(x)=c(x-x^2)$

(3) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1\arccos x\varphi(t)\mathrm{d}t=0$　　答案：$\varphi(x)=\begin{cases}c.\arccos x, & \lambda=1\\ 0, & \lambda\neq 1\end{cases}$

(4) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos(x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0$　　答案：$\varphi(x)=\begin{cases}c.\sin x, & \lambda=-\frac{2}{\pi}\\ c.\cos x, & \lambda=\frac{2}{\pi}\\ 0, & \lambda\neq\pm\frac{2}{\pi}\end{cases}$

(5) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos t\varphi(t)\mathrm{d}t=\sin x$　　答案：$\varphi(x)=\frac{2}{2-\lambda}\sin x,\lambda\neq 2$

(6) $\varphi(x)-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\varphi(t)\mathrm{d}t=2x-\pi$　　答案：$\varphi(x)=\frac{\pi^2}{\pi-1}\sin^2 x+2x-\pi$

(7) $\varphi(x)-\int_{-1}^1 e^{\arcsin x}\varphi(t)\mathrm{d}t=\tan x$　　答案：$\varphi(x)=\tan x$

(8) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}(\sin x\cos t-\sin 2x\cos 2t+\sin 3x\cos 3t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\cos x$

答案：$\varphi(x)=\lambda\pi\sin x+\cos x$

(9) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1\cos(q\ln t)\varphi(t)\mathrm{d}t=1$　　答案：$\varphi(x)=\frac{1+q^2}{1+q^2-\lambda}$

(10) $\varphi(x)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[x-\frac{1}{2}(3t^2-1)+\frac{1}{2}t(3x^2-1)\right]\varphi(t)\mathrm{d}t=1$

答案：$\varphi(x)=\frac{15}{32}(x+1)^2+\frac{15}{16}$

2. 用逐次逼近法求下列方程

(1) $\varphi(x)=1+\lambda\int_0^1(t+x)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(2) $\varphi(x)=x-\lambda\int_0^1 \mathrm{e}^{t+x}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(3) $\varphi(x)=1+\lambda\int_0^1(1-3xt)\varphi(t)\mathrm{d}t$

(4) $\varphi(x)=\sin x+\lambda\int_0^{2\pi}\cos(x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

3. 利用解核解下列积分方程

(1) $\varphi(x)-\int_0^{2\pi}\sin x\cos t\varphi(t)\mathrm{d}t=\cos 2x$

(2) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1(4xt-x^2)\varphi(t)\mathrm{d}t=x$

(3) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}\sin(x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t=1$

(4) $\varphi(x)+\lambda\int_0^1(1-3xt)\varphi(t)\mathrm{d}t=1$

4. 讨论积分方程的可解性

(1) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos x\varphi(t)\mathrm{d}t=1$

(答案：当 $\lambda\neq\frac{2}{\pi}$ 时有解 $\varphi(x)=1+\frac{2\lambda\pi}{2-\lambda\pi}\cos^2 x$；当 $\lambda=\frac{2}{\pi}$ 时，无解)

(2) $\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}x\mathrm{e}^t\varphi(t)\mathrm{d}t=x$

(答案：当 $\lambda\neq\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时有解 $\varphi(x)=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-2\lambda}x$；当 $\lambda=\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时，无解)

(3) $\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}|x-\pi|\varphi(t)\mathrm{d}t=x$

(答案：当 $\lambda\neq\frac{1}{\pi^2}$ 时有解 $\varphi(x)=x+\frac{2\pi^2}{1-\pi^2\lambda}\lambda|x-\pi|$；当 $\lambda=\frac{1}{\pi^2}$ 时，无解)

(4) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1(2xt-4x^2)\varphi(t)\mathrm{d}t=1-2x$

(答案：当 $\lambda\neq-3$ 时有解 $\varphi(x)=\frac{3x(2\lambda^2x-2\lambda^2-5\lambda-6+(\lambda+3)^2)}{(\lambda+3)^2}$；

当 $\lambda=-3$ 时，无解)

4 对称核积分方程

4.1 标准正交函数系

设给定一个函数系

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots \tag{4.1-1}$$

若函数系中任意两个函数都是正交的，且每一个函数的范数均为 1，即 $\|\varphi_i(x)\|=1$，则称该函数系为标准正交函数系。在由此标准正交函数系张成的空间里，任一函数 $f(x)$ 可按此标准正交函数系展开成级数形式。可以提出这样的问题，如何选择系数

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\cdots \tag{4.1-2}$$

使 $f(x)$ 的近似表达式

$$f(x)\approx\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x) \tag{4.1-3}$$

的误差

$$\delta_n=\int_a^b\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)\right|^2\mathrm{d}x \tag{4.1-4}$$

为最小。

令

$$a_k=(f,\varphi_k)=\int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}\mathrm{d}x \tag{4.1-5}$$

将式(4.1-4)展开得

$$\begin{aligned}\delta_n&=\int_a^b\left[f(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)\right]\left[\overline{f(x)}-\sum_{k=1}^{n}\bar{\alpha}_k\overline{\varphi_k(x)}\right]\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\left[|f(x)|^2-\sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha_k}f(x)\overline{\varphi_k(x)}-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overline{f(x)}\varphi_k(x)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\overline{\alpha_j}\varphi_i(x)\overline{\varphi_j(x)}\right]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.1-6}$$

利用函数系的正交性，上式进一步简化成

$$\begin{aligned}\delta_n&=\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha_k}a_k-\sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}\alpha_k+\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\\&=\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k-a_k|^2-\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\end{aligned} \tag{4.1-7}$$

显然，当 $\alpha_k=a_k(i=1,2,\cdots,n)$ 时，δ_n 最小，即

$$\delta_n=\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2=\|f(x)\|^2-\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 \tag{4.1-8}$$

由于 $\delta_n\geqslant0$，故有不等式

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\leqslant\|f(x)\|^2 \tag{4.1-9}$$

不等式的左边是正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$ 的部分和，而不等式指出该级数的一切部分和是有

界的，从而这个级数是收敛的，且有不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 \leqslant \|f(x)\|^2 \tag{4.1-10}$$

该不等式就是著名的 Bessel 不等式。而把取 $\alpha_k = a_k$ 的 $f(x)$ 按 $\varphi_k(x)$ 的展开式

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x) \tag{4.1-11}$$

称为 $f(x)$ 的傅里叶级数，其中 $a_k=(f,\varphi_k)=\int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}\mathrm{d}x$ 称为傅里叶系数。

此时，$\delta_n=0$，故有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 = \|f(x)\|^2 \tag{4.1-12}$$

称为 Parseval 等式。

下面给出正交标准函数系完备性的定义，并给出正交标准函数系完备的充分必要条件。

定义 4.1-1 设给定一个标准正交函数系，若存在一个不恒等于零的函数，与标准正交函数系中每个函数都正交，则称这个标准函数系是不完备的。反之，称之为完备正交函数系。

例如，在区间 $(-\pi,\pi)$ 内，下列函数系

$$\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots$$

是不完备的，但函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots$$

是完备的。

定理 4.1-1 标准正交函数系完备的充分必要条件是：对任何平方可积函数 $f(x)$，它的 Bessel 不等式成为 Parseval 等式。

现在讨论级数的收敛性，这里我们给出各种收敛性定义。

定义 4.1-2 记 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)$。若 $\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=f(x_0)$，则称级数在点 x_0 处收敛于 $f(x_0)$。收敛点的全体所组成的集 D 称为它的收敛域。这种收敛是对 D 中的每一个点进行考虑的，故称为逐点收敛。

对给定的 $\varepsilon>0$，在级数的收敛域内，虽然对不同的点 x_i，都能找到相应的序号 N_i，使得当 $n \geqslant N_i$ 时有

$$|S_n(x_i)-f(x_i)|<\varepsilon$$

但是，一般说来，不同的 x_i 所对应的序号 N_i 是不一样的。换句话说，$N(\varepsilon,x)$ 既依赖于 ε，也依赖于 x。

定义 4.1-3 若对给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)$（仅依赖于 ε），使得当 $n\geqslant N$ 时，对收敛域 D 中的一切点 x 都成立

$$|S_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

则称级数在收敛域 D 上一致收敛于 $f(x)$。若记

$$\|S_n(x)-f(x)\|=\sup_{x\in D}|S_n(x)-f(x)|$$

则一致性收敛等价于要求

$$\lim_{n\to\infty}\| S_n(x)-f(x)\| =0$$

一致收敛强于逐点收敛，例如 $S_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ 在[0,1]上逐点收敛于 $f(x)=0$，但它在[0,1]上不是一致收敛的。

定义 4.1-4 若 $S_n(x)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\| S_n(x)-f(x)\| =\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b |S_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}=0$$

则称级数在区间 $[a,b]$ 上均值收敛或平均收敛。

若级数在区域 D 内一致收敛，则可导出级数在区域 D 内也是平均收敛的。反之，级数在区域 D 内是平均收敛的，则不能保证级数也是一致收敛的。

4.2 对称核的特征值与特征函数

定义 4.2-1 若积分核 $k(x,t)$ 与它的共轭核相同，即 $k(x,t)=\overline{k(t,x)}$，则称积分核 $k(x,t)$ 为 Hermite 核。Hermite 核也称为对称核。对于实对称核有：$k(x,t)=k(t,x)$。

对称核是一类特殊的积分核，具有这种性质的积分核的积分方程在许多问题中经常遇到。这与许多问题的 Green 函数关于场点和源点是对称的有密切的关系。因此，讨论对称核积分方程求解的特殊方法具有重要意义。

在上一章关于连续核积分方程求解的 Fredholm 方法中，齐次方程的特征值和对应的特征函数扮演了重要的角色。对于对称核积分方程的求解，特征值和对应的特征函数仍将扮演重要角色。为此，在这一章的开始，我们首先讨论对称核的特征值与特征函数有哪些特殊性质。

定理 4.2-1 不恒为零的连续对称核 $k(x,t)$，至少具有一个特征值。

这个定理的证明比较复杂，这里不予证明，但读者可以在其他关于积分方程的书中找到详细的证明[1,2,3]。值得注意的是，对于非对称核，这个定理是不成立的。例如下列两个非对称核方程：

(1) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 (3x-2)t\varphi(t)\mathrm{d}t=0$

(2) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 (4x-3)t^2\varphi(t)\mathrm{d}t=0$

对于任意的 λ 值，方程都不存在非平凡解，因此，特征值不存在。

定理 4.2-2 对称核积分方程的一切特征值都是实数。

证明：设 λ 和 $\varphi(x)$ 是核 $k(x,t)$ 的特征值及相应的特征函数。则由特征值与特征函数的定义得

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0 \tag{4.2-1}$$

写成算子形式

$$\varphi(x)-\lambda\mathbf{K}\varphi=0 \tag{4.2-2}$$

将此式两边同乘 $\overline{\varphi(x)}$，并从 a 到 b 积分得

$$\|\varphi(x)\|^2-\lambda(\mathbf{K}\varphi,\varphi)=0 \tag{4.2-3}$$

即

$$\lambda = \frac{\| \varphi(x) \|^2}{(\mathbf{K}\varphi, \varphi)} \tag{4.2-4}$$

上式分子为实数。由于 $k(x,t)$ 是对称核，即 $\mathbf{K}=\mathbf{K}^*$（$\mathbf{K}$ 的共轭算子），故

$$(\mathbf{K}\varphi,\varphi)=(\varphi,\mathbf{K}^*\varphi)=(\varphi,\mathbf{K}\varphi)=\overline{(\mathbf{K}\varphi,\varphi)}$$

即 $(\mathbf{K}\varphi,\varphi)$ 是实数，故 λ 为实数。证毕。

需要注意的是，非对称核的特征值可能是复数。

定理 4.2-3 与对称核积分方程的不同特征值 λ_1 和 λ_2 对应的特征函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 是正交的。

证明：设 λ_1 和 λ_2 是对称核 $k(x,t)$ 的两个不同的特征值，$\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是分别与 λ_1 和 λ_2 对应的特征函数。因此有

$$\varphi_1(x)-\lambda_1\mathbf{K}\varphi_1=0 \tag{4.2-5}$$

$$\varphi_2(x)-\lambda_2\mathbf{K}\varphi_2=0 \tag{4.2-6}$$

用 $\lambda_2\overline{\varphi_2(x)}$ 和 $\lambda_1\overline{\varphi_1(x)}$ 分别乘以以上两式，并作从 a 到 b 积分运算得

$$\lambda_2(\varphi_1,\varphi_2)-\lambda_1\lambda_2(\mathbf{K}\varphi_1,\varphi_2)=0 \tag{4.2-7}$$

$$\lambda_1(\varphi_2,\varphi_1)-\lambda_1\lambda_2(\mathbf{K}\varphi_2,\varphi_1)=0 \tag{4.2-8}$$

后一个式子可以改写为

$$\lambda_1(\varphi_1,\varphi_2)-\lambda_1\lambda_2(\varphi_1,\mathbf{K}\varphi_2)=0 \tag{4.2-9}$$

利用积分核的对称性，则式(4.2-9)又可写为

$$\lambda_1(\varphi_1,\varphi_2)-\lambda_1\lambda_2(\mathbf{K}\varphi_1,\varphi_2)=0 \tag{4.2-10}$$

式(4.2-7)减去式(4.2-10)得

$$(\lambda_2-\lambda_1)(\varphi_1,\varphi_2)=0 \tag{4.2-11}$$

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$，故必有 $(\varphi_1,\varphi_2)=0$。证毕。

例 1 求积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1(3x-2)t\varphi(t)\mathrm{d}t=0$$

的特征值。

解：令

$$c=\int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t$$

则

$$\varphi(x)=\lambda c(3x-2)$$

将上式代入 $c=\int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t$ 得

$$c=\lambda c\int_0^1 t(3t-2)\mathrm{d}t$$

$$c=\lambda c\left[t^3\big|_0^1-t^2\big|_0^1\right]=0$$

即对任意 λ 值，积分方程的解为 $\varphi(x)=0$，由于积分方程不存在非零解，故积分方程的特征值不存在。

例 2 求积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1(4x-3)t^2\varphi(t)\mathrm{d}t=0$$

的特征值。

解:令

$$c=\int_0^1 t^2\varphi(t)\mathrm{d}t$$

则

$$\varphi(x)=\lambda c(4x-3)$$

将上式代入 $c=\int_0^1 t^2\varphi(t)\mathrm{d}t$ 得

$$c=\lambda c\int_0^1 t^2(4t-3)\mathrm{d}t$$

$$c=\lambda c\int_0^1 (4t^3-3t^2)\mathrm{d}t=0$$

故对任意 λ 值,积分方程的解为 $\varphi(x)=0$,由于积分方程没有非零解,故积分方程的特征值不存在。

例 3 求积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 xt\varphi(t)\mathrm{d}t=0$$

的特征值与特征函数。

解:令

$$c=\int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t$$

则

$$\varphi(x)=\lambda cx$$

将上式代入 $c=\int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t$ 得

$$c=\lambda c\int_0^1 t^2\mathrm{d}t$$

$$c=\frac{\lambda}{3}c$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{3}\right)c=0$$

当 $\lambda=3$ 时,c 可取任意值,此时积分方程的解为 $\varphi(x)=\lambda cx$,故积分方程的特征值为 $\lambda=3$,对应的特征函数为 $\varphi(x)=x$。

定理 4.2-4 对称核的一切特征函数组成的函数系恒存在一个标准正交函数系,它构成特征函数空间的一个正交基。

证明:设 λ_r 为对称核 $k(x,t)$ 的第 r 个特征值,与之对应的线性无关的特征函数不止一个,设为

$$\varphi_r^1(x),\varphi_r^2(x),\cdots,\varphi_r^m(x) \tag{4.2-12}$$

按照 Schmidt 正交化方法,即

$$\psi_r^1(x)=\frac{\varphi_r^1(x)}{\sqrt{(\varphi_r^1,\varphi_r^1)}}$$

$$\psi_r^2(x)=\frac{\hat{\varphi}_r^2(x)}{\sqrt{(\hat{\varphi}_r^2,\hat{\varphi}_r^2)}},\hat{\varphi}_r^2(x)=\varphi_r^2(x)-(\varphi_r^2,\psi_r^1)\psi_r^1(x)$$

$$\psi_r^3(x)=\frac{\hat{\varphi}_r^3(x)}{\sqrt{(\hat{\varphi}_r^3,\hat{\varphi}_r^3)}},\hat{\varphi}_r^3(x)=\varphi_r^3(x)-(\varphi_r^3,\psi_r^2)\psi_r^2(x)-(\varphi_r^3,\psi_r^1)\psi_r^1(x)$$

$$\vdots$$

$$\psi_r^m(x)=\frac{\hat{\varphi}_r^m(x)}{\sqrt{(\hat{\varphi}_r^m,\hat{\varphi}_r^m)}},\hat{\varphi}_r^m(x)=\varphi_r^m(x)-\sum_{k=1}^{m-1}(\varphi_r^m,\psi_r^k)\psi_r^k(x)$$

总可以找到一组标准正交函数基

$$\psi_r^1(x),\psi_r^2(x),\cdots,\psi_r^m(x) \tag{4.2-13}$$

使得特征函数组(4.1-12)中的任一函数,都可由标准正交函数组(4.1-13)线性表示。又因为对应不同特征值的特征函数是正交的,所以对每个特征值 $\lambda_r(r=1,2,\cdots,n)$ 的特征函数组都作标准正交化处理后,再组合到一起就构成一个完备的标准正交特征函数系,它构成特征函数空间的一个正交基,证毕。

考虑到一个特征值对应的标准正交特征函数不止一个,分析起来不太方便。对有 m 个标准正交特征函数的特征值 λ,可以认为有 m 个特征值与这 m 个标准正交特征函数一一对应,只是这 m 个特征值的数值是相等的。这样我们就可以得到与特征函数空间的标准正交基,即

$$\psi_1(x),\psi_2(x),\cdots,\psi_p(x)$$

一一对应的一组特征值

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$$

定理 4.2-5 对称核 $k(x,t)$ 的存在于有限区间 $[-l,l]$ 的特征值的个数 m 是有限的,且满足

$$m\leqslant l^2\cdot\int_a^b\int_a^b|k(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

证明:设 $\{\lambda_n\}$ 与 $\{\varphi_n(x)\}$ 是积分方程的特征值与标准正交特征函数,则有

$$\varphi_n(x)=\lambda_n\int_a^b k(x,t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}=\int_a^b k(x,t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t$$

上式左端可看成是积分核 $k(x,t)$ 关于标准正交函数系 $\{\overline{\varphi_n(t)}\}$ 的傅里叶系数。由 Bessel 不等式得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\varphi_n(x)|^2}{\lambda_n^2}\leqslant\int_a^b|k(x,t)|^2\mathrm{d}t$$

设在区间 $[-l,l]$ 内的特征值个数为 m,则有

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{|\varphi_n(x)|^2}{\lambda_n^2}\leqslant\int_a^b|k(x,t)|^2\mathrm{d}t$$

两边关于 x 从 a 到 b 积分得

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\lambda_n^2}\leqslant\int_a^b\int_a^b|k(x,t)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

由于 $-l\leqslant\lambda_n\leqslant l$,故 $\lambda_n^2\leqslant l^2$ 或 $\frac{1}{\lambda_n^2}\geqslant\frac{1}{l^2}$。这样上式可改变成

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{l^2}\leqslant\int_a^b\int_a^b|k(x,t)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x=A^2$$

$$\frac{m}{l^2}\leqslant A^2$$

故

$$m\leqslant l^2A^2$$

证毕。

定理 4.2-6 与对称核的任意特征值 λ_r 对应的标准正交特征函数

$$\varphi_r^1(x),\varphi_r^2(x),\cdots,\varphi_r^m(x)$$

的个数 m 是有限的。

证明：假设与 λ 对应的标准正交特征函数的个数 m 是无限：

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$$

由 $\varphi_n(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t$ 知 $\frac{\varphi_n}{\lambda}$ 是 $k(x,t)$ 关于正交函数系 $\{\overline{\varphi_n(x)}\}$ 的傅里叶展开系数。

由 Bessel 不等式得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\varphi_n(x)|^2}{\lambda^2}\leqslant\int_a^b|k(x,t)|^2\mathrm{d}t$$

两边关于 x 从 a 到 b 积分得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2}\leqslant\int_a^b\int_a^b|k(x,t)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x=A^2$$

上式左边是∞，而右边是有限值，假设导致矛盾的结果，故假设不成立。证毕。

定理 4.2-7 对称核的最小特征值 λ_1 的绝对值的倒数等于 $|(\mathbf{K}\varphi,\varphi)|$ 在条件 $(\varphi,\varphi)=1$ 下的极大值，即

$$\frac{1}{|\lambda_1|}=\max_{\|\varphi\|=1}|(\mathbf{K}\varphi,\varphi)|=|(\mathbf{K}\varphi_1,\varphi_1)|$$

式中，φ_1 为与 λ_1 对应的特征函数。

4.3 Hilbert-Schmidt 展开定理

现在要考虑这样的问题：对称核 $k(x,t)$ 是否可以按标准正交特征函数系展开？什么条件下这个展开级数是收敛的？回答这个问题之前首先给出下述定理。

定理 4.3-1 设 λ_n 和 $\varphi_n(x)$ 是对称且平方可积核 $k(x,t)\in L^2(a,b)$ 的特征值和相应特征函数，则级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2}\tag{4.3-1}$$

收敛。

证明：因为 λ_n 和 $\varphi_n(x)$ 分别为对称核的特征值和特征函数，故成立

$$\varphi_k(x)=\lambda_k\int_a^b k(x,t)\varphi_k(t)\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}=\int_a^b k(x,t)\varphi_k(t)\mathrm{d}t$$

可见，$a_k=\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}$ 是 $k(x,t)$ 关于特征函数系 $\{\overline{\varphi_k(t)}\}$ 展开的 Fourier 系数，由 Bessel 不等式知

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2}\leqslant\int_a^b|k(x,t)|^2\mathrm{d}t<C(\text{有限常数})$$

证毕。

定理 4.3-2 设对称核 $k(x,t)$ 的特征值与对应特征函数为

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\lambda_{n+1},\cdots\tag{4.3-2}$$

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x), \cdots \tag{4.3-3}$$

则特征值 $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \cdots$ 与相应的特征函数 $\varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+2}(x), \cdots$ 也是对称核

$$p(x,t) = k(x,t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k} \tag{4.3-4}$$

的特征值和特征函数。而 $\lambda_i(i \leqslant n)$ 与 $\varphi_i(i \leqslant n)$ 均不是 $p(x,t)$ 的特征值与特征函数。

证明：考虑方程

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b p(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{4.3-5}$$

即

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}(\varphi, \varphi_k) = 0 \tag{4.3-6}$$

将积分核 $k(x,t)$ 的特征值 λ_i 与特征函数 $\varphi_i(x)$ 代入上式中，当 $i > n$ 时，由于

$$(\varphi_i, \varphi_k) = 0 (i \neq k) \tag{4.3-7}$$

和

$$\varphi_i(x) - \lambda_i \int_a^b k(x,t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{4.3-8}$$

故得

$$\varphi_i(x) - \lambda_i \int_a^b p(x,t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{4.3-9}$$

即 λ_i 和 $\varphi_i(x)(i > n)$ 也是积分核 $p(x,t)$ 的特征值与特征函数。

当 $i \leqslant n$ 时，由于

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}(\varphi_i, \varphi_k) \neq 0 \tag{4.3-10}$$

故

$$\varphi_i(x) - \lambda_i \int_a^b p(x,t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t \neq 0 \tag{4.3-11}$$

即 λ_i 和 $\varphi_i(x)(i \leqslant n)$ 不是对称核 $p(x,t)$ 的特征值与特征函数。证毕。

由定理 4.3-2 进一步可证明下面关于退化核的一个重要定理：

定理 4.3-3　对称核是退化核的充分必要条件是：它仅有有限个特征值。

证明：若对称核 $k(x,t)$ 仅有有限个特征值

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$$

和特征函数

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$$

则根据定理 4.3-2 知，对称核

$$p(x,t) = k(x,t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k} \tag{4.3-12}$$

没有特征值。而由对称核的性质知，不恒为 0 的对称核至少有 1 个特征值。从而推出 $p(x,t) \equiv 0$ 即

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k} \tag{4.3-13}$$

是退化核。反之，由退化核性质知，它只能有有限个特征值。证毕。

现在我们给出作为对称核积分方程求解重要基础的 Hilbert-Schmidt 展开定理，利用它可得到第Ⅱ类对称核积分方程解的表达式。

定理 4.3-4 （Hilbert-Schmidt 展开定理）设对称核 $k(x,t)$ 的所有特征值与相应的特征函数为

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots \tag{4.3-14}$$

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots \tag{4.3-15}$$

并设 $h(x)$ 和 $k(x,t)$ 是区间 $[a,b]$ 内的平方可积函数，则函数

$$f(x)=\mathbf{K}h=\int_a^b k(x,t)h(t)\mathrm{d}t \tag{4.3-16}$$

可展开为正交标准函数系 $\{\varphi_k(x)\}$ 的绝对且一致收敛的傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x) \tag{4.3-17}$$

其中展开式的系数

$$a_k=(f,\varphi_k)=\frac{(h,\varphi_k)}{\lambda_k} \tag{4.3-18}$$

证明：首先证明 $f(x)=(\mathbf{K}h)(x)$ 的 Fourier 级数展开式的系数

$$a_k=\frac{(h,\varphi_k)}{\lambda_k}$$

利用对称核的性质

$$(\mathbf{K}h,\varphi_k)=(h,\mathbf{K}\varphi_k)\text{及 }\varphi_k=\lambda_k\mathbf{K}\varphi_k$$

得

$$a_k=(f,\varphi_k)=(\mathbf{K}h,\varphi_k)=(h,\mathbf{K}\varphi_k)=\left(h,\frac{\varphi_k}{\lambda_k}\right)=\frac{(h,\varphi_k)}{\lambda_k}=\frac{h_k}{\lambda_k} \tag{4.3-19}$$

其次，证明展开级数是绝对且一致收敛的。由 Cauchy 不等式知级数余项

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}h_k\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|^2&\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}|h_k|^2\cdot\sum_{k=n+1}^{n+p}\left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|^2\\&\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}|h_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|^2\end{aligned} \tag{4.3-20}$$

因为 $k(x,t)$ 与 $h(x)$ 均为平方可积函数，故它们的傅里叶系数满足 Bessel 不等式，即 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|h_k|^2$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|^2$ 均有界。由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|^2$ 有界，而 $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}|h_k|^2$ 当 n 足够大时可为任意小的数，由此推知展开级数是绝对且一致收敛的。证毕。

定理 4.3-5 设 $\{\lambda_k\}$ 与 $\{\varphi_k(x)\}$ 是对称且平方可积核 $k(x,t)$ 的特征值及相应的特征函数系，则 $k(x,t)$ 可以展开为特征函数的傅里叶级数

$$k(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\overline{\varphi_k(t)} \tag{4.3-21}$$

且这级数同时关于两个变量 x 和 t 是一致收敛的。

证明：(1) 当对称核的特征值和特征函数为有限个时，根据定理 4.3-3 知，必有

$$k(x,t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\overline{\varphi_k(t)} \tag{4.3-22}$$

(2) 当对称核的特征值与特征函数为无限个时，作函数

$$p(x,t)=k(x,t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\overline{\varphi_k(t)} \tag{4.3-23}$$

令
$$\hat{k}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\overline{\varphi_k(t)} \tag{4.3-24}$$

以下证明，若式(4.3-24)一致收敛，则 $\hat{k}(x,t)\equiv k(x,t)$。

记 $R(x,t)=k(x,t)-\hat{k}(x,t)$，有

$$\begin{aligned}\int_a^b R(x,t)\overline{\varphi_l(x)}\mathrm{d}x &= \int_a^b k(x,t)\overline{\varphi_l(x)}\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b \varphi_k(x)\overline{\varphi_l(x)}\mathrm{d}x\int_a^b \overline{k(t,s)\varphi_k(s)}\mathrm{d}s\\ &= \int_a^b k(x,t)\overline{\varphi_l(x)}\mathrm{d}x-\int_a^b \overline{k(t,s)\varphi_l(s)}\mathrm{d}s=0\end{aligned} \tag{4.3-25}$$

即 $R(x,t)$ 与所有 $\varphi_l(x)$，$(l=1,2,\cdots)$ 成正交。

以下证明 $R(x,t)\equiv 0$，若 $R(x,t)$ 不恒等于 0，则由于 $R(x,t)$ 也是对称核，故必至少有一个特征值与特征向量，使得

$$\varphi_R(x)=\lambda_R\int_a^b R(x,t)\varphi_R(t)\mathrm{d}t \tag{4.3-26}$$

又
$$(\varphi_R(x),\varphi_l(x))=\lambda_R\int_a^b\left[\int_a^b R(x,t)\overline{\varphi_l(x)}\mathrm{d}x\right]\varphi_R(t)\mathrm{d}t=0 \tag{4.3-27}$$

故 $\varphi_R(x)$ 与所有 $\varphi_l(x)$，$(l=1,2,\cdots)$ 成正交。

注意到假设级数(4.3-24)是一致收敛的，可得

$$\int_a^b \hat{k}(x,t)\varphi_R(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\int_a^b\overline{\varphi_k(x)}\varphi_R(t)\mathrm{d}t=0 \tag{4.3-28}$$

于是

$$\begin{aligned}\varphi_R(x)&=\lambda_R\int_a^b[k(x,t)-\hat{k}(x,t)]\varphi_R(t)\mathrm{d}t\\ &=\lambda_R\int_a^b k(x,t)\varphi_R(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{4.3-29}$$

即 $\varphi_R(x)$ 也是对称核 $k(x,t)$ 的特征函数，且又同该积分核的所有特征函数 $\varphi_l(x)$，$(l=1,2,\cdots)$ 成正交，故有

$$\varphi_R(x)\equiv 0 \tag{4.3-30}$$

也就是说 $R(x,t)$ 没有特征值。再根据不恒为 0 的对称核必有特征值知

$$R(x,t)\equiv 0 \tag{4.3-31}$$

即成立

$$k(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\overline{\varphi_k(t)} \tag{4.3-32}$$

证毕。

定理 4.3-5 是针对平方可积核而言的，若对称核是连续的，则有下述 Mercer 定理。

定理 4.3-6（Mercer 定理） 设连续对称核 $k(x,t)$ 的特征值序列 $\{\lambda_k\}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 从某一个起，其余所有特征值均保持正号或负号，则对称核可以按特征函数系 $\{\varphi_k(x)\}$ 展开，

$$k(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\overline{\varphi_k(t)}$$

且该级数同时关于自变量 x 和 t 绝对和一致收敛。

4.4 Hilbert-Schmidt 方法

对于连续对称核的第Ⅱ类 Fredholm 方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t+f(x) \tag{4.4-1}$$

利用 Hilbert-Schmidt 展开定理得

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{p=1}^{n}c_p\varphi_p(x) \tag{4.4-2}$$

式中，展开系数 c_p 未知，若能求得展开系数 c_p，$(p=1,2,\cdots,n)$则式(4.4-2)就是方程(4.4-1)解的表达式。为此，我们将式(4.4-2)代入式(4.4-1)

$$f(x)+\lambda\sum_{p=1}^{n}c_p\varphi_p(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\left[f(t)+\lambda\sum_{p=1}^{n}c_p\varphi_p(t)\right]\mathrm{d}t+f(x) \tag{4.4-3}$$

即

$$\sum_{p=1}^{n}c_p\varphi_p(x)=\int_a^b k(x,t)f(t)\mathrm{d}t+\lambda\sum_{p=1}^{n}c_p\int_a^b k(x,t)\varphi_p(t)\mathrm{d}t \tag{4.4-4}$$

再利用连续对称核的 Mercer 定理

$$k(x,t)=\sum_{k=1}^{n}a_k\overline{\varphi_k(t)} \tag{4.4-5}$$

式中

$$a_k=\int_a^b k(x,t)\varphi_k(t)\mathrm{d}t=\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \tag{4.4-6}$$

将(4.4-5)代入式(4.4-4)得

$$\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\int_a^b f(t)\overline{\varphi_k(t)}\mathrm{d}t}{\lambda_k}\varphi_k(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}c_k\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \tag{4.4-7}$$

比较上式两端 $\varphi_k(x)$的系数得

$$c_k=\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\int_a^b f(t)\overline{\varphi_k(t)}\mathrm{d}t \tag{4.4-8}$$

代回式(4.4-2)即得方程的解

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k}{\lambda_k-\lambda}\varphi_k(x) \tag{4.4-9}$$

式中

$$f_k=\int_a^b f(t)\overline{\varphi_k(t)}\mathrm{d}t \tag{4.4-10}$$

上述求解对称核积分方程的过程，可概括为如下定理：

定理 4.4-1 对于具有连续对称核的第Ⅱ类 Fredholm 积分方程(4.4-1)，若 λ 不是特征值，则方程有唯一解，且可表示成

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{\lambda_k-\lambda}\varphi_k(x) \tag{4.4-11}$$

式中，λ_k 和 $\varphi_k(x)(k=1,2,\cdots,n)$是全部特征值及相应的标准正交特征函数。而

$$f_k=\int_a^b f(t)\overline{\varphi_k(t)}\mathrm{d}t$$

上述定理给出了 λ 不是方程特征值时方程的解。当 λ 是方程的特征值时，方程可能无解也可能有解，根据 Fredholm 第三定理给出的可解性条件，我们有下面的定理。

定理 4.4-2 对于具有连续对称核的第Ⅱ类 Fredholm 积分方程(4.4-1)，若 λ 与某特征值λ_r 相等，即 $\lambda_r=\lambda$。设与 λ_r 对应的特征函数为

$$\varphi_{r+1}(x),\varphi_{r+2}(x),\cdots,\varphi_{r+q}(x)$$

则方程(4.4-1)解存在的充分必要条件是

$$\int_a^b f(x)\overline{\varphi_{r+s}(x)}\mathrm{d}x = 0 \quad (s=1,2,\cdots,q) \tag{4.4-12}$$

且解可表示为

$$\varphi(x) = \sum_{s=1}^{q} c_s\varphi_{r+s}(x) + \lambda_r \sum_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k-\lambda_r}\varphi_k(x) + f(x) \tag{4.4-13}$$

式中,c_s 为任意常数,$\varphi_k(x)$是与 λ_k 对应的特征函数,$f_k = \int_a^b f(t)\overline{\varphi_k(t)}\mathrm{d}t$。

证明:因式(4.4-1)是对称核积分方程,它的共轭齐次方程就是

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{4.4-14}$$

其特征值与特征函数分别为 λ_r 和 $\varphi_{r+1}(x),\varphi_{r+2}(x),\cdots,\varphi_{r+q}(x)$。

根据 Fredholm 第三定理,非齐次对称核积分方程(4.4-1)可解的充分必要条件为

$$\int_a^b f(x)\overline{\varphi_{r+s}(x)}\mathrm{d}x = 0,(s=1,2,\cdots,q) \tag{4.4-15}$$

当可解性条件满足时,非齐次方程的解是齐次方程(4.4-14)的通解

$$\sum_{s=1}^{q} c_s\varphi_{r+s}(x) \tag{4.4-16}$$

与非齐次方程的一个特解

$$\lambda_r \sum_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k-\lambda_r}\varphi_k(x) + f(x) \tag{4.4-17}$$

之和。证毕。

对连续对称核积分方程理论作出重大贡献的是 Hilbert 和 Schmidt,因此,类似于连续核方程的 Fredholm 理论,通常称关于对称核的积分方程理论为 Hilbert-Schmidt 理论,并称式(4.4-11)和式(4.4-13)为 Hilbert-Schmidt 公式。根据平方可积对称核的展开定理,上述理论对平方可积核的积分方程也是适用的。

相对于一般连续核积分方程,对称核积分方程的求解相对容易。一些连续核积分方程,经过适当变换,可以化成对称核积分方程,从而可以利用 Hilbert-Schmidt 公式简化方程的求解。

设有如下形式的积分核

$$k(x,t) = r(t)l(x,t) \tag{4.4-18}$$

式中,$l(x,t)$是对称核,$r(t)$在$[a,b]$上满足 $r(t)\geqslant 0$ 条件,这时可以把积分方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{4.4-19}$$

化成对称核积分方程。

将方程的两边同乘以$\sqrt{r(x)}$,并记 $\psi(x) = \sqrt{r(x)}\varphi(x)$,得

$$\psi(x) - \lambda\int_a^b \sqrt{r(x)r(t)}\,l(x,t)\psi(t)\mathrm{d}t = \sqrt{r(x)}f(x) \tag{4.4-20}$$

显然,新的积分方程的核$\sqrt{r(x)r(t)}\,l(x,t)$是对称核。

上述对称核积分方程的特征值可能是有限个(对称核为退化核时),也可能是无限个(对

称核为非退化核时），但对应于某一个特征值的线性无关的特征函数总是有限个。如果对称核积分方程的特征值和特征函数不是这样的，例如特征值充满某个区间，特征值是连续的而不是离散的，或特征值集合不是可列集，或某个特征值的秩（与特征值对应的线性无关特征函数的个数）为无穷，则我们称之为非 Fredholm 型积分方程，而不予考虑，例如下面两个积分方程：

(1) $\varphi(x)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|}\varphi(t)dt$，（特征值 $0<\lambda<\infty$）

(2) $\varphi(x)=\lambda\int_{0}^{\infty}\cos xt\cdot\varphi(t)dt$，（特征值 $\lambda=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 的秩为无穷）

以第二个积分方程为例：若 $f(t)\in L^2(0,\infty)$，则 $f(t)$ 的傅里叶余弦变换和反变换为

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos(xt)dt$$

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_c(x)\cos(xt)dx$$

两式相加得

$$F_c(x)+f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}[F_c(t)+f(t)]\cos(xt)dt$$

因此，函数 $F_c(x)+f(x)$ 是积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_0^{\infty}\phi(t)\cos(xt)dt$$

的对应于特征值 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 的特征函数。又因为 $f(x)$ 的任意性，故与特征值 $\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 对应的线性无关特征函数有无穷多个，即特征值 $\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 的秩为无穷。

同样，两式相减得：

$$F_c(x)-f(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}[F_c(t)-f(t)]\cos(xt)dt$$

即 $F_c(x)-f(x)$ 是与特征值 $\lambda=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 对应的特征函数，同样特征值 $\lambda=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 的秩也是无穷。

例 4 解积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)dt=x$$

式中，$k(x,t)=\begin{cases}x(t-1),0\leqslant x\leqslant t\\ t(x-1),t\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$

解：(1) 求齐次方程的特征值与特征函数系。依题意有

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^x t(x-1)\varphi(t)dt+\lambda\int_x^1 x(t-1)\varphi(t)dt$$

$$=\lambda(x-1)\int_0^x t\varphi(t)dt+\lambda x\int_x^1(t-1)\varphi(t)dt$$

$$\varphi'(x)=\lambda\int_0^x t\varphi(t)dt+\lambda(x-1)x\varphi(x)+\lambda\int_x^1(t-1)\varphi(t)dt-\lambda x(x-1)\varphi(x)$$

$$=\lambda\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t+\lambda\int_x^1 (t-1)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$\varphi''(x)=\lambda x\varphi(x)+\lambda(1-x)\varphi(x)=\lambda\varphi(x)$$

齐次方程的特征值问题与下列的微分方程特征值问题等价：

$$\begin{cases}\varphi''(x)-\lambda\varphi(x)=0\\ \varphi(0)=0,\varphi(1)=0\end{cases}$$

微分方程的特征方程为

$$r^2-\lambda=0$$

当 $\lambda>0$ 时，微分方程的解为

$$\varphi(x)=c_1\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x}+c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}$$

代入边值条件确定系数得

$$c_1=c_2=0$$

即 $\lambda>0$ 时，齐次积分方程不存在非平凡解，故没有正特征值。

当 $\lambda<0$ 时，微分方程的解为

$$\varphi(x)=d_1\cos\sqrt{|\lambda|}x+d_2\sin\sqrt{|\lambda|}x$$

代入边值条件确定系数得 $\quad d_1=0,d_2\sin\sqrt{|\lambda|}=0$

可见当 $\lambda_k=-k^2\pi^2,(k=1,2,\cdots)$ 时，齐次积分方程有非零解

$$\varphi_k(x)=\sin k\pi x$$

从而得到齐次积分方程的特征值

$$\lambda_k=-k^2\pi^2,(k=1,2,\cdots)$$

和对应的标准正交函数系

$$\varphi_k(x)=\sqrt{2}\sin k\pi x$$

(2) 求非齐次积分方程的解：

$$f_k=\int_0^1 x\varphi_k(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_0^1 x\sin k\pi x\mathrm{d}x=\sqrt{2}\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}$$

当 $\lambda\neq\lambda_k$ 时，非齐次积分方程存在唯一解

$$\varphi(x)=x+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{\lambda_k-\lambda}\varphi_k(x)=x-\frac{2\lambda}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(\lambda+k^2\pi^2)}\sin k\pi x$$

当 $\lambda=\lambda_k$ 时，由于

$$f_k=\int_0^1 x\varphi_k(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2}\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\neq 0$$

可解性条件不满足，故积分方程无解。

例 5 解积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\sin x$$

式中，$k(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t,0\leqslant x\leqslant t\\ \sin t\cos x,t\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$

解：(1) 求齐次方程的特征值与特征函数系。依题意有

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^x\sin t\cos x\varphi(t)\mathrm{d}t+\lambda\int_x^{\pi}\sin x\cos t\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$\varphi'(x) = -\lambda\sin x\int_0^x \sin t\varphi(t)\mathrm{d}t + \lambda\cos x\sin x\varphi(x) + \lambda\cos x\int_x^\pi \cos t\varphi(t)\mathrm{d}t - \lambda\cos x\sin x\varphi(x)$$

$$= -\lambda\sin x\int_0^x \sin t\varphi(t)\mathrm{d}t + \lambda\cos x\int_x^\pi \cos t\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$\varphi''(x) = -\lambda\cos x\int_0^x \sin t\varphi(t)\mathrm{d}t - \lambda\sin x\sin x\varphi(x) - \lambda\sin x\int_x^\pi \cos t\varphi(t)\mathrm{d}t - \lambda\cos x\cos x\varphi(x)$$

$$= -(1+\lambda)\varphi(x)$$

齐次方程的特征值问题与下列的微分方程特征值问题等价

$$\begin{cases}\varphi''(x) + (1+\lambda)\varphi(x) = 0\\ \varphi(0) = 0, \varphi'(\pi) = 0\end{cases}$$

当 $1+\lambda\leqslant 0$ 时，微分方程没有非零解。

当 $1+\lambda > 0$ 时，微分方程的一般解为

$$\varphi(x) = d_1\cos\sqrt{|1+\lambda|}x + d_2\sin\sqrt{|1+\lambda|}x$$

代入边值条件确定系数得 $d_1 = 0, d_2\sqrt{|1+\lambda|}\cos\sqrt{|1+\lambda|}\pi = 0$

可见当 $1+\lambda_k = \left(k-\frac{1}{2}\right)^2$ 时，即

$$\lambda_k = \left(k-\frac{1}{2}\right)^2 - 1, (k = 1, 2, \cdots)$$

齐次积分方程有非平凡解

$$\varphi_k(x) = \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x, (k = 1, 2, \cdots)$$

从而得到齐次积分方程的特征值

$$\lambda_k = \left(k-\frac{1}{2}\right)^2 - 1, (k = 1, 2, \cdots)$$

和对应的标准正交函数系

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x, (k = 1, 2, \cdots)$$

(2) 求非齐次积分方程的解：

$$f_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \sin x\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^\pi \left[\cos\left(k-\frac{3}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right]\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[\frac{2}{2k-3}\sin\left(k-\frac{3}{2}\right)\pi - \frac{2}{2k+1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$$

$$= \begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(2n-\frac{3}{2}\right)^{-1}\left(2n+\frac{1}{2}\right)^{-1}, (k = 2n)\\ -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(2n-\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(2n+\frac{3}{2}\right)^{-1}, (k = 2n+1)\end{cases}$$

利用 Hilbert-Schmidt 公式，当 $\lambda\neq\lambda_k$ 时，非齐次积分方程的解为

$$\varphi(x) = \sin x + \frac{2\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(2n-\frac{1}{2}\right)^2 - (1+\lambda)\right]^{-1}\left[\left(2n-\frac{3}{2}\right)\left(2n+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}\sin\left(2n-\frac{1}{2}\right)x -$$

$$\frac{2\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2-(1+\lambda)\right]^{-1}\left[\left(2n-\frac{1}{2}\right)\left(2n+\frac{3}{2}\right)\right]^{-1}\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)x$$

当 $\lambda=\lambda_k$ 时，由于 $f_k\neq 0$，可解性条件不满足，故积分方程无解。

习　题

1. 求下列积分方程的特征值与特征函数

(1) $\varphi(x)=\lambda\int_0^{\pi}\sin x\sin 2y\varphi(y)\mathrm{d}y$

(2) $\varphi(x)=\lambda\int_0^{\pi}\sin x\varphi(y)\mathrm{d}y$

(3) $\varphi(x)=2\lambda\int_0^{1}\mathrm{e}^{x+y}\varphi(y)\mathrm{d}y$

(4) $\varphi(x)=\lambda\int_0^{1}\mathrm{e}^{-|x-t|}\varphi(t)\mathrm{d}t$

(参考答案：$\lambda_n=\frac{1+\mu_n^2}{2}$，$\varphi_n(x)=\sin\mu_n x+\mu_n\cos\mu_n x$，$\mu_n$ 是方程 $2\cot\mu=\mu-\frac{1}{\mu}$ 的根)

(5) $\varphi(x)=\lambda\int_0^{1}k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

式中，$k(x,t)=\begin{cases}t(x+1),0\leqslant x\leqslant t\\ x(t+1),t\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$

(参考答案：$\lambda_0=1$，$\lambda_n=-n^2\pi^2$，$\varphi_0(x)=\mathrm{e}^x$，$\varphi_n(x)=\sin n\pi x+n\pi\cos n\pi x$，$(n=1,2,\cdots)$)

(6) $\varphi(x)=\lambda\int_0^{1}k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

式中，$k(x,t)=\begin{cases}x(t-1),0\leqslant x\leqslant t\\ t(x-1),t\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$

(参考答案：$\lambda_n=-n^2\pi^2$，$\varphi_n(x)=\sin n\pi x$，$(n=1,2,\cdots)$)

(7) $\varphi(x)=\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$

式中，$k(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t,0\leqslant x\leqslant t\\ \cos x\sin t,t\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$

(参考答案：$\lambda_n=4n^2-1$，$\varphi_n(x)=\sin 2nx$，$(n=1,2,\cdots)$)

2. 求解下列齐次积分方程

(1) $\varphi(x)-\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}|x|\varphi(t)\mathrm{d}t=0$

(2) $\varphi(x)+\lambda\int_0^{\pi}\cos(x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0$

3. 求解下列非齐次积分方程

(1) $\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\int_0^{1}k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\frac{x}{2}$

式中，$k(x,t)=\begin{cases}\frac{x(2-t)}{2},0\leqslant x\leqslant t\\ \frac{t(2-x)}{2},t\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$

(参考答案：$\varphi(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$)

(2) $\varphi(x)-2\int_0^{\pi}k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\cos 2\pi$

式中，$k(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t, & 0\leqslant x\leqslant t\\ \sin t\cos x, & t\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$

（参考答案：$\varphi(x)=3\cos 2x+2\sin\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{4}\pi\right)^{-1}$）

(3) $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=x$

式中，$k(x,t)=\begin{cases}x(t-1), & 0\leqslant x\leqslant t\\ t(x-1), & t\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$

(4) $\varphi(x)-\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\mathrm{sh}x$

式中，$k(x,t)=\begin{cases}-\mathrm{e}^{-t}\mathrm{sh}x, & 0\leqslant x\leqslant t\\ -\mathrm{e}^{-x}\mathrm{sh}t, & t\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$

5 第Ⅰ类积分方程

5.1 第Ⅰ类 Fredholm 方程的特点

第 1 章在讨论积分方程的分类时，将具有

$$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{5.1-1}$$

形式的积分方程称为第Ⅰ类 Fredholm 积分方程。

类似于微分方程或偏微分方程，从解的存在性、唯一性和稳定性角度，可将积分方程分成适定的和不适定的积分方程。第Ⅱ类 Fredholm 积分方程通常是适定的，而第Ⅰ类 Fredholm 积分方程则通常是不适定的，即积分方程的解通常不存在，即使解存在也不唯一。另外，由于第Ⅰ类积分方程的积分算子的逆算子通常不连续，所以右端微小扰动就会引起解的很大的改变，也就是说第Ⅰ类积分方程的解通常也不具有稳定性。

例 1 求解积分方程

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x+y)\varphi(y)\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{2x}$$

解：令

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} \cos y\varphi(y)\mathrm{d}y, B = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y\varphi(y)\mathrm{d}y$$

则左端等于 $A\sin x + B\cos x$，右端等于 e^{2x}。可见，无论 A，B 取怎样的数，均不能使左端等于右端，所以该积分方程的解不存在。

例 2 求解积分方程

$$\int_0^1 (x^3 + x^2 t + t^2)\varphi(t)\mathrm{d}t = \cos x$$

解：令

$$c_1 = \int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t, c_2 = \int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t, c_3 = \int_0^1 t^2\varphi(t)\mathrm{d}t$$

则左端等于 $c_1x^3 + c_2x^2 + c_3$，右端等于 $\cos x$。c_1, c_2, c_3 无论如何取值，都不可能使左端等于右端，故积分方程的解不存在。

例 3 求解积分方程

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x+y)\varphi(y)\mathrm{d}y = 3\sin x + 2\cos x$$

解：令

$$\varphi(x) = A\sin x + B\cos x, (A、B \text{ 为待定常数})$$

代入原方程得：

$$\int_{-\pi}^{\pi} [A\sin x\cos y\sin y + B\sin x\cos^2 y + A\cos x\sin^2 y + B\cos x\sin y\cos y]\mathrm{d}y$$
$$= 3\sin x + 2\cos x$$

利用三角函数的正交性得

$$A\pi\cos x + B\pi\sin x = 3\sin x + 2\cos x$$

比较对应系数得

$$A=\frac{2}{\pi};B=\frac{3}{\pi}$$

所以方程有特解

$$\hat{\varphi}(x)=\frac{2}{\pi}\sin x+\frac{3}{\pi}\cos x$$

又设 $\varphi_0(x)$是齐次方程

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x+y)\varphi(y)\mathrm{d}y=0$$

的解，则

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\hat{\varphi}(x)$$

也是原非齐次方程的解，对于本题有

$$\varphi_0(x)=c_0+\sum_{n=2}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中，包含任意常数 c_0,a_n,b_n，由此可见非齐次方程的解是不唯一的。

例 4 分析积分方程的稳定性：

$$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x),\ c\leqslant x\leqslant d$$

式中，$f(x)\in L^2[c,d]$；$\varphi(t)\in C[a,b]$。

解：平方可积函数空间 $L^2[c,d]$中函数的偏差用下式估计：

$$\rho_l(f_1,f_2)=\left\{\int_c^d|f_1(x)-f_2(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

连续函数空间 $C[a,b]$中，函数的偏差用下式估计：

$$\rho_c(\varphi_1,\varphi_2)=\max_{t\in[a,b]}|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|$$

设当右端为 $f_1(x)$时，方程的相应解为 $\varphi_1(t)$，即

$$f_1(x)\equiv\int_a^b k(x,t)\varphi_1(t)\mathrm{d}t$$

则解 $\varphi_2(t)=\varphi_1(t)+N\sin\omega t$，对应的右端项就是

$$f_2(x)=f_1(x)+N\int_a^b k(x,t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

当 ω 很大时，$k(x,t)\sin\omega t$ 成为高度振荡函数，因此偏差

$$\rho_l(f_1,f_2)=|N|\ \left\{\int_c^d\left|\int_a^b k(x,t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

可以任意地小。但此时解的偏差

$$\rho_c(\varphi_1,\varphi_2)=\max_{x\in[a,b]}|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|=\max_{x\in[a,b]}|N\sin\omega t|=|N|$$

则可能是很大的(如果 N 是很大的数)。这是用 $C[a,b]$空间度量来估计函数 φ_1 与 φ_2 之间偏差。若改用 $L^2[c,d]$空间度量来估计解的偏差，则有

$$\rho_l(\varphi_1,\varphi_2)=\ \left\{\int_a^b|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}=|N|\ \left\{\int_a^b|\sin\omega x|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=|N|\sqrt{\frac{b-a}{2}-\frac{1}{2\omega}\sin\omega(b-a)\cos\omega(b+a)}$$

显而易见，数 ω 和数 N 可这样选取，即在右端 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 偏差充分小时，而其相应解的偏差却可以任意的大。这表明第Ⅰ类方程的解不具有稳定性。

上述几个例子都表明了第Ⅰ类积分方程的不适定性。现在我们简单探讨一下积分方程解的存在性。对积分方程

$$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{5.1-2}$$

两边关于 x 求直至 n 阶导数，即

$$\int_a^b \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\varphi(t)\mathrm{d}t = f'(x) \tag{5.1-3}$$

$$\int_a^b \frac{\partial k^2(x,t)}{\partial x^2}\varphi(t)\mathrm{d}t = f''(x) \tag{5.1-4}$$

$$\vdots$$

然后在上述方程两边分别乘以 $1, p_1(x), \cdots, p_n(x)$，再将各式相加得

$$\int_a^b \left[p_n(x)\frac{\partial^n}{\partial x^n} + p_{n-1}(x)\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} + \cdots + 1\right]k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$= \left[p_n(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + p_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + 1\right]f(x) \tag{5.1-5}$$

可见，若 $k(x,t)$ 满足

$$\left[p_n\frac{\partial^n}{\partial x^n} + p_{n-1}(x)\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} + \cdots + 1\right]k(x,t) = 0 \tag{5.1-6}$$

则 $f(x)$ 也必须满足

$$\left[p_n\frac{\partial^n}{\partial x^n} + p_{n-1}(x)\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} + \cdots + 1\right]f(x) = 0 \tag{5.1-7}$$

积分方程才可能有解。这表明对给定的积分核，只有当右端项函数满足特定的条件，积分方程才可能有解，因此，一般情况下第Ⅰ类积分方程是无解的。

若积分核是退化核，即

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{N} a_k(x)b_k(t) \tag{5.1-8}$$

代入式(5.1-1)得

$$\sum_{k=1}^{N} a_k(x)\int_a^b b_k(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

令

$$c_k = \int_a^b b_k(t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

则 $f(x)$ 只有具有

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \cdot a_k(x) \tag{5.1-9}$$

形式时，积分方程才可能有解，否则积分方程的解就不存在。

下面给出具有退化核的第Ⅰ类积分方程的求解方法。不失一般性，设

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{N} a_k(x)b_k(t) \tag{5.1-10}$$

当 $f(x)$ 具有形式(5.1-9)时，可设积分方程的解

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{M}d_k b_k(x) \tag{5.1-11}$$

将(5.1-10)和式(5.1-11)代入式(5.1-1)得

$$\sum_{i=1}^{N}a_i(x)\sum_{k=1}^{M}d_k\int_a^b b_k(t)b_i(t)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{N}c_i a_i(x)$$

令

$$b_{ik}=\int_a^b b_k(t)b_i(t)\mathrm{d}t \tag{5.1-12}$$

则有

$$\sum_{i=1}^{N}a_i(x)\sum_{k=1}^{M}b_{ik}d_k=\sum_{i=1}^{N}c_i a_i(x)$$

比较方程两边 $a_i(x)$ 的系数得

$$\sum_{k=1}^{M}b_{ik}d_k=c_i,(i=1,2,\cdots,N) \tag{5.1-13}$$

上式是一个线性代数方程组。当 $M=N$，且系数行列式不等于0，即 $\det(b_{ik})\neq 0$ 时，可得到唯一一组系数 $d_k(k=1,2,\cdots,N)$，代回式(5.1-11)就得到积分方程的解 $\varphi(x)$。当系数行列式等于0时，线性代数方程组存在非唯一解，从而积分方程解不唯一。当 $M>N$ 时，系数 d_k 也可能存在非唯一解，从而积分方程的解也不唯一。而当 $M<N$ 时，线性方程组无解，从而积分方程也无解。需要说明的是，除了式(5.1-11)形式的解外，积分方程还可能具有其他形式的解。

例5 求解积分方程

$$\int_0^1(x^3+2x^2t+3t^2)\varphi(t)\mathrm{d}t=x^3+x^2+1$$

解：$a_1(x)=x^3,a_2(x)=x^2,a_3(x)=1$

$b_1(t)=1,b_2(t)=2t,b_3(t)=3t^2$

$$b_{11}=\int_0^1 b_1^2(t)\mathrm{d}t=1,b_{12}=\int_0^1 b_1(t)b_2(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 2t\mathrm{d}t=1,b_{13}=\int_0^1 3t^2\mathrm{d}t=1$$

$$b_{21}=\int_0^1 2t\mathrm{d}t=1,b_{22}=\int_0^1 4t^2\mathrm{d}t=\frac{4}{3},b_{23}=\int_0^1 6t^3\mathrm{d}t=\frac{3}{2}$$

$$b_{31}=\int_0^1 3t^2\mathrm{d}t=1,b_{32}=\int_0^1 6t^3\mathrm{d}t=\frac{3}{2},b_{33}=\int_0^1 9t^4\mathrm{d}t=\frac{9}{5}$$

线性代数方程组为

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

$\det(b_{ik})=\frac{1}{60}\neq 0$，可确定一组系数：$d_1=1,d_2=0,d_3=0$，即积分方程的解为

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{3}d_k b_k(x)=1。$$

例6 求解积分方程

$$\int_0^1(x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t=x+1$$

解：$a_1(x)=x, a_2(x)=1$

$b_1(t)=1, b_2(t)=t$

$b_{11}=\int_0^1 b_1^2(t)\mathrm{d}t=1, b_{12}=\int_0^1 b_1(t)b_2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2},$

$b_{21}=\int_0^1 b_2(t)b_1(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}, b_{22}=\int_0^1 b_2^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}$

(1) 令 $\varphi(t)=d_1+d_2t$，则

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解：$d_1=-2, d_2=6$，即积分方程的解为 $\varphi(t)=6t-2$。

(2) 若令 $\varphi(t)=d_1+d_2t+d_3t^2$，则

$$\int_0^1 (x+t)(d_1+d_2t+d_3t^2)\mathrm{d}t=x+1$$

根据式(5.1-12)可得

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解之得

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{11}{6} \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

即积分方程的解为 $\varphi(t)=-\frac{11}{6}+5t+t^2$。

可见积分方程的解是不唯一的，事实上，任何如

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{N} d_k t^k, (N\geqslant 1)$$

形式的函数都可能是积分方程的解。

5.2 第Ⅰ类积分方程的特征值与特征函数

定义 5.2-1 设对某个不恒为 0 的实数 λ，存在不恒为 0 的函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$，满足下列方程组

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(x,y)\psi(y)\mathrm{d}y \tag{5.2-1a}$$

$$\psi(x)=\lambda\int_a^b \overline{k(y,x)}\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{5.2-1b}$$

则称 λ 是具有积分核 $k(x,t)$ 的第Ⅰ类积分方程

$$\int_a^b k(x,t)g(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{5.2-2}$$

的特征值，或直接称 λ 为积分核 $k(x,t)$ 的特征值。$\{\varphi(x),\psi(x)\}$ 称为与特征值 λ 对应的特

征函数对。

由上述定义可以看出，若$\{\varphi(x),\psi(x)\}$是与λ对应的特征函数对，则$\{\varphi(x),-\psi(x)\}$或$\{-\varphi(x),\psi(x)\}$就是与$-\lambda$对应的特征函数。因此，对第Ⅰ类积分方程，我们一般可认为特征值是正的，以避免不确定性。

下面讨论第Ⅰ类积分方程特征值与对应特征函数对的求法。将式(5.2-1b)代入式(5.2-1a)得

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lambda\int_a^b k(x,y)\left[\lambda\int_a^b \overline{k(t,y)}\varphi(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y \\ &= \lambda^2\int_a^b\left[\int_a^b k(x,y)\,\overline{k(t,y)}\mathrm{d}y\right]\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda^2\int_a^b k^*(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.2-3}$$

式中

$$k^*(x,t)=\int_a^b k(x,y)\,\overline{k(t,y)}\mathrm{d}y \tag{5.2-4}$$

称为积分核$k(x,t)$的右迭核。

同样，将式(5.2-1a)代入式(5.2-1b)可得

$$\psi(x)=\lambda^2\int_a^b k_*(x,t)\psi(t)\mathrm{d}t \tag{5.2-5}$$

式中

$$k_*(x,t)=\int_a^b \overline{k(y,x)}k(y,t)\mathrm{d}y \tag{5.2-6}$$

称为积分核$k(x,t)$的左迭核。

这样就可以通过求第Ⅱ类积分方程式(5.2-3)和式(5.2-5)的特征值$\lambda^*=\lambda^2$与特征函数$\varphi(x)$及$\psi(x)$得到第Ⅰ类积分方程(5.2-2)的特征值λ与特征函数对$\{\varphi(x),\psi(x)\}$。

定理5.2-1 若λ_i，$\{\varphi_i(x),\psi_i(x)\}$是第Ⅰ类积分方程(5.2-2)的特征值与相应的特征函数对，则$(\lambda_i^2,\varphi_i(x))$和$(\lambda_i^2,\psi_i(x))$分别是对称核式(5.2-4)和式(5.2-6)的通常意义下的特征值和特征函数。

证明：设λ_i，$\{\varphi_i(x),\psi_i(x)\}$是第Ⅰ类积分方程(5.2-2)的特征值与特征函数对，则有

$$\varphi_i(x)=\lambda_i\int_a^b k(x,y)\psi_i(y)\mathrm{d}y \tag{5.2-7}$$

$$\psi_i(x)=\lambda_i\int_a^b \overline{k(y,x)}\varphi_i(y)\mathrm{d}y \tag{5.2-8}$$

将式(5.2-8)代入式(5.2-7)得

$$\varphi_i(x)=\lambda_i^2\int_a^b k^*(x,t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t \tag{5.2-9}$$

同样，将式(5.2-7)代入式(5.2-8)可得

$$\psi_i(x)=\lambda_i^2\int_a^b k_*(x,t)\psi_i(t)\mathrm{d}t \tag{5.2-10}$$

可见，(λ_i^2,φ_i)和(λ_i^2,ψ_i)分别是$k^*(x,t)$与$k_*(x,t)$通常意义下的特征值与特征函数。证毕。

当第Ⅰ类积分方程的积分核是对称核时，由于

$$k(x,t)=\overline{k(t,x)} \tag{5.2-11}$$

可得右迭核等于左迭核，即

$$k^{*}(x,t)=k_{*}(x,t) \tag{5.2-12}$$

从而式(5.2-3)与式(5.2-5)完全相同，即特征函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 满足相同的积分方程，从而有

$$\varphi(x)=\psi(x) \tag{5.2-13}$$

这样，定义第Ⅰ类积分方程特征值的积分方程组(5.2-1)就退化为

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{5.2-14}$$

从而第Ⅰ类积分方程的特征值与特征函数和第Ⅱ类积分方程的特征值与特征函数是相同的。在一般情况下，由于 $k(x,t)$ 是非对称的，左迭核与右迭核并不相等。

下面来定义一类特殊的对称核。

定义 5.2-2 对任意不恒为 0 的连续函数 $p(x)\in C[a,b]$，令

$$J=\int_a^b\int_a^b k(x,t)p(x)\overline{p(t)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{5.2-15}$$

(a) 若 $J\geqslant 0$，则称积分核 $k(x,t)$ 为半正定核。

(b) 若 $J\leqslant 0$，则称积分核 $k(x,t)$ 是半负定核。

(c) 若 $J>0$，则称积分核 $k(x,t)$ 为正定核。

(d) 若 $J<0$，则称积分核 $k(x,t)$ 是负定核。

定理 5.2-2 对称核 $k(x,t)$ 为半正定核的充分必要条件是它的所有特征值均为正的；对称核 $k(x,t)$ 为半负定的充分必要条件是它的所有特征值均为负的。

证明：由于 $p(x)\in C[a,b]$，可以按积分核的特征函数系 $\{\varphi_k(x)\}$ 作傅里叶展开

$$p(x)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\varphi_k(x) \tag{5.2-16}$$

而根据 Hilbert-Schmidt 定理，$\int_a^b k(x,t)\overline{p(t)}\mathrm{d}t$ 也可以按 $\{\varphi_k(x)\}$ 展开，且

$$\int_a^b k(x,t)\overline{p(t)}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\overline{p_k}}{\lambda_k}\overline{\varphi_k(x)} \tag{5.2-17}$$

式中，$p_k=(\varphi_k(x),p(x))$。

对式(5.2-17)两边乘以 $p(x)$ 再关于 x 从 a 到 b 积分得

$$J=\int_a^b\int_a^b k(x,t)\overline{p(t)}p(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|p_k|^2}{\lambda_k} \tag{5.2-18}$$

可见，若 $\lambda_k>0,(k=1,2,\cdots)$，必然 $J\geqslant 0$；同样，若 $\lambda_k<0,(k=1,2,\cdots)$，必然 $J\leqslant 0$。这就证明了充分性。

再证必要性。设特征值 $\lambda_i<0$，则用与 λ_i 对应的特征函数 $\varphi_i(x)$ 代替式(5.2-18)中的 $p(x)$ 得

$$J=\int_a^b\int_a^b k(x,t)\overline{\varphi_i(t)}\varphi_i(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\int_a^b\overline{\varphi_k(x)}\varphi_i(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda_i}<0 \tag{5.2-19}$$

(式(5.2-19)利用了特征函数的正交性)这与 $J\geqslant 0$ 相矛盾，故不能有负特征值。

同理可证 $\lambda_i<0$，也是 $J\leqslant 0$ 的必要条件。证毕。

定义 5.2-3 对于连续对称核 $k(x,t)$，如果不存在不恒为 0 的连续函数与 $k(x,t)$ 的所有特征函数正交，则称积分核 $k(x,t)$ 在连续函数类中是完备的。

对于对称核来说，正定性与完备性是等价的。即成立下面的定理：

定理 5.2-3 半正定核 $k(x,t)$ 成为正定核的充分必要条件是 $k(x,t)$ 是完备的。

证明：先证充分性。如果 $k(x,t)$ 是完备核，则不存在不恒为 0 的函数 $p(x)$ 与核 $k(x,t)$ 的特征函数系 $\{\varphi_k(x)\}$ 都正交，即必有 1 个 $p_k=(p(x),\varphi_k(x))\neq 0$，由式(5.2-18)知，此时必有 $J>0$。

再证必要性，由式(5.2-18)知，若 $J>0$，必须至少有 1 个 $p_k\neq 0$，即任意不恒为 0 的函数 $p(x)$，都不会与所有 $\{\varphi_k(x)\}$ 正交，从而核 $k(x,t)$ 必须是完备的。证毕。

对任意平方可积函数 $\varphi(x)\in L^2[a,b]$，恒有

$$
\begin{aligned}
(k_*\varphi,\varphi)&=\int_a^b\int_a^b k_*(x,t)\varphi(x)\overline{\varphi(t)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=\int_a^b\int_a^b\varphi(x)\overline{\varphi(t)}\left[\int_a^b\overline{k(s,x)}k(s,t)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=\int_a^b\left[\int_a^b\overline{k(s,x)}\varphi(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b k(s,t)\overline{\varphi(t)}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s\\
&=\int_a^b\left|\int_a^b\overline{k(s,x)}\varphi(x)\mathrm{d}x\right|^2\mathrm{d}s\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{5.2-20}
$$

同样，有

$$
(k^*\varphi,\varphi)\geqslant 0 \tag{5.2-21}
$$

即对称核 k_* 和 k^* 都是半正定核，根据定理 5.2-3 它们的特征值都是正的。

进一步还可以证明，迭核 k_* 和 k^* 关于同一特征值 λ_i 的秩是相同的。即，若 $\varphi_1^i(x),\varphi_2^i(x),\cdots,\varphi_l^i(x)$ 和 $\psi_1^i(x),\psi_2^i(x),\cdots,\psi_m^i(x)$ 是迭核 k_* 和 k^* 对应于同一特征值 λ_i 的特征函数，则必有 $l=m$。

最后，我们指出第Ⅰ类积分方程是可对称化的积分方程。只要在式(5.2-2)两边同乘以 $\overline{k(x,y)}$，并关于 x 从 a 到 b 积分，得

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\overline{k(x,y)}\mathrm{d}x&=\int_a^b\int_a^b k(x,t)\overline{k(x,y)}g(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\
&=\int_a^b\left[\int_a^b k(x,t)\overline{k(x,y)}\mathrm{d}x\right]g(t)\mathrm{d}t\\
&=\int_a^b k_*(t,y)g(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{5.2-22}
$$

若令

$$
F(y)=\int_a^b f(x)\overline{k(x,y)}\mathrm{d}x
$$

则有

$$
F(y)=\int_a^b k_*(t,y)g(t)\mathrm{d}t \tag{5.2-23}
$$

因为左迭核 $k_*(t,y)=\int_a^b k(x,t)\overline{k(x,y)}\mathrm{d}x$ 是对称核，因而原积分方程就转化成了具有对称核 $k_*(t,y)$ 的积分方程(5.2-23)。

例 7 求积分方程的特征值与特征函数

$$
\int_0^1(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t=x+1
$$

解:(1) $k^*(x,t)=\int_0^1 k(x,y)\overline{k(t,y)}\mathrm{d}y$

在本题中,$k(x,y)=x-y$;$\overline{k(t,y)}=t-y$。

所以

$$k^*(x,t)=\int_0^1 (x-y)(t-y)\mathrm{d}y=xt-\frac{x+t}{2}+\frac{1}{3}$$

原积分方程的特征值与特征函数$\{\varphi_i(x)\}$满足

$$\varphi_i(x)=\lambda_i^2\int_0^1 k^*(x,t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t$$

由于$k^*(x,t)$是退化核,可用如下方法求其特征值:

令

$$c_1=\int_0^1\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$c_2=\int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t$$

则

$$\varphi(x)=\lambda^2\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)t\varphi(t)\mathrm{d}t+\lambda^2\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}\right)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$=\lambda^2\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}\right)c_1+\lambda^2\left(x-\frac{1}{2}\right)c_2$$

将上式代入c_1和c_2的定义式得

$$c_1=\lambda^2c_1\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\lambda^2c_2\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$c_2=\lambda^2c_1\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right)t\mathrm{d}t+\lambda^2c_2\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t$$

化简后得

$$c_1=\frac{\lambda^2}{12}c_1+\lambda^2c_2\cdot 0$$

$$c_2=\lambda^2c_1\cdot 0+\frac{\lambda^2}{12}c_2$$

即

$$\begin{pmatrix}1-\frac{\lambda^2}{12} & 0\\ 0 & 1-\frac{\lambda^2}{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

从而$\lambda_1=2\sqrt{3}$。相应的特征函数$\varphi_1(x)=\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}\right)c_1+\left(x-\frac{1}{2}\right)c_2=d_1x+d_2$($d_1,d_2$为任意常数)。

(2) $k_*(x,t)=\int_0^1\overline{k(y,x)}k(y,t)\mathrm{d}y$

在本题中$k(y,t)=y-t$;$\overline{k(y,x)}=y-x$。

所以

$$k_*(x,t)=\int_0^1(y-x)(y-t)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}-\frac{t+x}{2}+xt$$

可见该积分方程的积分核$k(x,t)=x-t$虽不是对称核,但其左迭核与右迭核相同,因而特征值及相应的特征函数也相同。即$\psi_i(x)=\varphi_i(x)$。

例 8 求积分方程的特征值与特征函数

$$\int_0^1 (x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t = x+1$$

解:积分核 $k(x,t)=x+t$ 是对称核,其左、右迭核应相同,即

$$\begin{aligned} k^*(x,t) &= \int_0^1 k(x,y)\overline{k(t,y)}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (x+y)(t+y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 [xt+(x+t)y+y^2]\mathrm{d}y \\ &= xt+\frac{x+t}{2}+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_*(x,t) &= \int_0^1 \overline{k(y,x)}k(y,t)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (y+x)(y+t)\mathrm{d}y \\ &= xt+\frac{x+t}{2}+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

从而 $\psi_i(x)=\varphi_i(x)$,且特征值 λ_i 与特征函数满足如下方程:

$$\varphi(x)=\lambda^2\int_0^1 k^*(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

又由于 $k^*(x,t)$是退化核,故可用如下方法求特征值与特征函数,令

$$c_1=\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t;c_2=\int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t$$

则

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda^2\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t+\lambda^2\left(x+\frac{1}{2}\right)\int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda^2\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)c_1+\lambda^2\left(x+\frac{1}{2}\right)c_2 \end{aligned}$$

将上式代入 c_1 和 c_2 的定义式得

$$c_1=\lambda^2c_1\cdot\frac{7}{12}+\lambda^2c_2\cdot 1$$

$$c_2=\lambda^2c_1\cdot\frac{1}{3}+\lambda^2c_2\cdot\frac{7}{12}$$

即

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{7}{12}\lambda^2 & -\lambda^2 \\ -\frac{1}{3}\lambda^2 & 1-\frac{7}{12}\lambda^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

令 $\det A=0$,得

$$\left(1-\frac{7}{12}\lambda^2\right)^2-\frac{1}{3}\lambda^4=0$$

$$\left(1-\frac{7}{12}\lambda^2-\frac{\lambda^2}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{7}{12}\lambda^2+\frac{\lambda^2}{\sqrt{3}}\right)=0$$

$$\lambda_1^2=\left(\frac{7}{12}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1},\lambda_2^2=\left(\frac{7}{12}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}$$

令 $c_2=1$，则

(1) 当 $\lambda=\lambda_1$ 时，$c_1=\sqrt{3}$；

(2) 当 $\lambda=\lambda_2$ 时，$c_1=-\sqrt{3}$。

所以特征函数

$$\varphi_1(x)=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)c_1+\left(x+\frac{1}{2}\right)c_2=\sqrt{3}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\varphi_2(x)=-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{3}+\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

验证 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 的正交性

$$\int_0^1\varphi_1(x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{12}\right)\mathrm{d}x=0$$

5.3 Schmidt-Picard 定理

在讨论具有对称核的第Ⅱ类积分方程时，我们讨论了 Hilbert-Schmidt 展开定理。本节我们将讨论类似的展开定理，并最后给出第Ⅰ类积分方程的可解性条件，即 Schmidt-Picard 定理。

定理 5.3-1 设 $\{\lambda_i\}$ 和 $\{\varphi_i(x),\psi_i(x)\}$ 是第Ⅰ类积分方程

$$\int_a^b k(x,t)g(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{5.3-1}$$

或积分核 $k(x,t)$ 的特征值序列和相应的标准正交特征函数对序列，且 $k(x,t)$ 和 $g(t)$ 均为区间 $[a,b]$ 上的平方可积函数，则 $\int_a^b k(x,t)g(t)\mathrm{d}t$ 可展成关于 $\{\varphi_i\}$ 的绝对且一致收敛级数，即

$$f(x)=\int_a^b k(x,t)g(t)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{\infty}f_i\varphi_i(x) \tag{5.3-2}$$

式中，$f_i=(f(x),\varphi_i(x))$。而 $\int_a^b\overline{k(t,x)}f(t)\mathrm{d}t$ 可展成关于 $\{\psi_i(t)\}$ 的绝对且一致收敛级数，即 $F(x)=\int_a^b\overline{k(t,x)}f(t)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{\infty}F_i\psi_i(x)$，其中，$F_i=(F(x),\psi_i(x))$。

证明：考虑级数(5.3-2)的余项，并应用 Cauchy 不等式知

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=n+1}^{n+p}f_j\varphi_j(x)\right|^2&\leqslant\sum_{j=n+1}^{n+p}\lambda_j^2|f_j|^2\cdot\sum_{j=n+1}^{n+p}\frac{|\varphi_j(x)|^2}{\lambda_j^2}\\&\leqslant\sum_{j=n+1}^{n+p}\lambda_j^2|f_j|^2\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|\varphi_j(x)|^2}{\lambda_j^2}\end{aligned} \tag{5.3-3}$$

若将 $k(x,t)$ 关于 $\{\psi_j(x)\}$ 展开，即

$$k(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j(x)\overline{\psi_j(t)} \tag{5.3-4}$$

则傅里叶系数

$$a_j(x)=\int_a^b k(x,t)\psi_j(t)\mathrm{d}t=\frac{\varphi_j(x)}{\lambda_j} \tag{5.3-5}$$

根据 Bessel 不等式，应有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{\varphi_j(x)}{\lambda_j}\right|^2\leqslant\int_a^b|k(x,t)|^2\mathrm{d}t<M(\text{有限常数})\tag{5.3-6}$$

从而,

$$\left|\sum_{j=n+1}^{n+p}f_j\varphi_j(x)\right|^2\leqslant M\sum_{j=n+1}^{n+p}\lambda_j^2|f_j|^2\tag{5.3-7}$$

又注意到

$$f_j=\int_a^b f(x)\overline{\varphi_j(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b\int_a^b k(x,t)\overline{\varphi_j(x)}g(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda_j}\int_a^b\overline{\psi_j(t)}g(t)\mathrm{d}t\tag{5.3-8}$$

即

$$\lambda_j f_j=\int_a^b\overline{\psi_j(t)}g(t)\mathrm{d}t\tag{5.3-9}$$

从而 $\lambda_j f_j$ 可看成是 $g(t)$ 关于 $\{\overline{\psi_j(t)}\}$ 的傅里叶展开级数的系数,根据 Bessel 不等式,应有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2|f_j|^2\leqslant\int_a^b|g(t)|^2\mathrm{d}t<\infty\tag{5.3-10}$$

因此,对任意小的正数 ε,我们可取足够大的 n 和 p,使有

$$\sum_{j=n+1}^{n+p}\lambda_j^2|f_j|^2<\frac{\varepsilon}{M}\tag{5.3-11}$$

从而,

$$\left|\sum_{j=n+1}^{n+p}f_j\varphi_j(x)\right|^2\leqslant M\sum_{j=n+1}^{n+p}\lambda_j^2|f_j|^2<M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon\tag{5.3-12}$$

这就证明了级数(5.3-2)是收敛的,现在证明级数的和就是 $f(x)$。

$$\begin{aligned}\left\|f(x)-\sum_{i=1}^{n}f_i\varphi_i(x)\right\|^2&=\int_a^b\left|\int_a^b k(x,y)g(y)\mathrm{d}y-\sum_{i=1}^{n}f_i\varphi_i(x)\right|^2\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\int_a^b k(x,y)g(y)\mathrm{d}y\int_a^b\overline{k(x,t)g(t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}x-\\&\quad 2\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n}\overline{f}_i\int_a^b\int_a^b k(x,y)g(y)\overline{\varphi_i(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\\&=\int_a^b\int_a^b k_*(t,y)g(y)\overline{g(t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}y-2\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n}\overline{f}_i(f,\varphi_i)+\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\\&=\int_a^b\int_a^b k_*(t,y)g(y)\overline{g(t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}y-\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\end{aligned}\tag{5.3-13}$$

考虑到 $k_*(x,y)$ 是对称核,且有

$$\begin{aligned}\int_a^b|k_*(x,y)|^2\mathrm{d}y&=\int_a^b\left|\int_a^b\overline{k(t,x)}k(t,y)\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}y\\&\leqslant\int_a^b\left[\int_a^b|k(t,x)|^2\mathrm{d}t\right]\cdot\left[\int_a^b|k(t,y)|^2\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y<M^2(b-a)\end{aligned}\tag{5.3-14}$$

利用对称核的 Hilbert-Schmidt 定理,

$$\int_a^b k_*(x,y)g(y)\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(g,\psi_i)}{\lambda_i^2}\psi_i(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_i}{\lambda_i^2}\psi_i(t)$$

得

$$\int_a^b\int_a^b k_*(t,y)g(y)\overline{g(t)}\mathrm{d}y\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|g_i|^2}{\lambda_i^2}\tag{5.3-15}$$

代入式(5.3-13),并注意到式(5.3-8)得

$$\left\| f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i\varphi_i(x) \right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|g_i|^2}{\lambda_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{|g_i|^2}{\lambda_i^2}$$

当 $n\to\infty$ 时,上式绝对且一致收敛于 0,因此,级数 $\sum_{i=1}^{n} f_i\varphi_i(x)$ 绝对且一致收敛于 $f(x)$。类似的,可以证明 $\sum_{i=1}^{n} F_i\psi_i(x)$ 绝对且一致收敛于 $F(x)$。

定理 5.3-2(Schmidt-Picard 定理) 设 $\{\lambda_i\}$ 和 $\{\varphi_i(x), \psi_i(x)\}$ 是第Ⅰ类积分方程

$$\int_a^b k(x,t)g(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{5.3-16}$$

的特征值序列和相应的特征函数对序列。且正交标准系 $\{\varphi_i(x)\}$ 对平方可积函数是完备的,则第Ⅰ类积分方程有解的充分必要条件是级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 |f_i|^2 \tag{5.3-17}$$

是收敛的。其中,$f_i = (f, \varphi_i)$。

证明:先证必要性。设第Ⅰ类积分方程有解 $g(t)\in L^2[a,b]$。根据第Ⅰ类积分方程特征值的定义,则有

$$\begin{aligned}\int_a^b g(t)\overline{\psi_i(x)}\mathrm{d}t &= \lambda_i \int_a^b g(t)\left[\int_a^b k(x,t)\,\overline{\varphi_i(x)}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t \\ &= \lambda_i \int_a^b \overline{\varphi_i(x)}\left[\int_a^b k(x,t)g(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \\ &= \lambda_i \int_a^b \overline{\varphi_i(x)} f(x)\mathrm{d}x = \lambda_i f_i \end{aligned} \tag{5.3-18}$$

即 $\lambda_i f_i$ 是函数 $g(t)$ 关于 $\{\psi_i(t)\}$ 展开的傅里叶系数,根据 Bessel 不等式,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 |f_i|^2 \leqslant \int_a^b |g(x)|^2 \mathrm{d}x < A(\text{有限值}) \tag{5.3-19}$$

故级数(5.3-17)是收敛的。

再证充分性。设级数(5.3-17)是收敛的,则当 $n\to\infty$ 时,有

$$\sum_{i=n-1}^{\infty} \lambda_i^2 |f_i|^2 \to 0 \tag{5.3-20}$$

根据里斯-费希尔(Riesz-Fischer)定理必存在函数 $g(x)\in L^2[a,b]$ 使当 $n\to\infty$ 时,

$$\left\| g(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \psi_i(x) \right\| \to 0 \tag{5.3-21}$$

作辅助函数

$$\varphi(y) = f(y) - \int_a^b k(y,x)g(x)\mathrm{d}x \tag{5.3-22}$$

则有

$$(\varphi, \varphi_i) = (f, \varphi_i) - \int_a^b\int_a^b k(y,x)g(x)\overline{\varphi_i(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f_i - \frac{1}{\lambda_i}\int_a^b g(x)\overline{\psi_i(x)}\mathrm{d}x \tag{5.3-23}$$

注意到

$$f_i = \int_a^b f(x)\overline{\varphi_i(x)}\mathrm{d}x = \int_a^b\left[\int_a^b k(x,t)g(t)\mathrm{d}t\right]\overline{\varphi_i(x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\left[\int_a^b k(x,t)\ \overline{\varphi_i(x)}\mathrm{d}x\right]g(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\lambda_i}\int_a^b g(t)\overline{\psi_i(t)}\mathrm{d}t=\frac{g_i}{\lambda_i} \tag{5.3-24}$$

这一式子表示 $f(x)$关于$\{\varphi_i(x)\}$的 Fourier 系数 f_i 与 $g(x)$关于$\{\psi_i(t)\}$的 Fourier 系数 g_i 之间存在关系式

$$f_i=\frac{1}{\lambda_i}g_i \tag{5.3-25}$$

利用这一关系式，从式(5.3-23)得$(\varphi,\varphi_i)=0$。
又知道$\{\varphi_i(x)\}$是完备的，故 $\varphi\equiv 0$，即

$$f(y)=\int_a^b k(y,x)g(x)\mathrm{d}x \tag{5.3-26}$$

也就是说

$$g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i f_i\psi_i(x) \tag{5.3-27}$$

是积分方程的解。证毕。

从上述定理的证明过程中看到，若第Ⅰ类积分方程有解，则它可以表示成

$$g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i f_i\psi_i(x) \tag{5.3-28}$$

事实上，若记 $g_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\psi_i(x)$，则有下面的定理。

定理 5.3-3 若第Ⅰ类积分方程

$$\int_a^b k(x,t)g(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{5.3-29}$$

有解，则当且仅当正交标准函数系$\{\varphi_i(x)\}$对于 $f(x)$是完备的时，序列 $\mathbf{K}g_n$ 一致收敛于 $f(x)$；当且仅当正交标准函数系$\{\psi_i(t)\}$对于 $g(x)$是完备的，$g_n(x)$均值收敛于 $g(x)$。特别是，若

$$g(x)=\int_a^b \overline{k(t,x)}h(t)\mathrm{d}t \tag{5.3-30}$$

式中，$h(t)\in L^2[a,b]$，则 $g_n(x)$一致收敛于 $g(x)$。

证明：注意到

$$\mathbf{K}g_n(x)=\int_a^b k(x,t)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\psi_i(t)\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\int_a^b k(x,t)\psi_i(x)\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f_i\varphi_i(x) \tag{5.3-31}$$

则

$$\int_a^b|\mathbf{K}g_n-f(x)|^2\mathrm{d}x=\int_a^b\left|\sum_{i=1}^{n}f_i\varphi_i(x)-f(x)\right|^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x-2\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n}f_i\int_a^b\varphi_i(x)\overline{f(x)}\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2$$

$$=\int_a^b |f(x)|^2 dx-\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2 \tag{5.3-32}$$

当$\{\varphi_i(x)\}$对 $f(x)$是完备的时,有帕塞瓦尔(Parseval)等式

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx=\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^2 \tag{5.3-33}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |\mathbf{K}g_n-f(x)|^2 dx=0 \tag{5.3-34}$$

这表明,$\mathbf{K}g_n$ 均值收敛于 $f(x)$。

若第Ⅰ类积分方程有解,即有

$$f(x)=\int_a^b k(x,t)g(t)dt \tag{5.3-35}$$

则由定理 5.3-1 知

$$f(x)=\int_a^b k(x,t)g(t)dt=\sum_{i=1}^{\infty}f_i\varphi_i(x) \tag{5.3-36}$$

是一致收敛的,即级数 $\mathbf{K}g_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f_i\varphi_i(x)$一致收敛于 $f(x)$。

同样,若积分方程有解 $g(x)$,则有

$$\begin{aligned}\int_a^b |g_n(x)-g(x)|^2 dx &= \int_a^b \left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\psi_i(x)-g(x)\right|^2 dx\\ &=\int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\psi_i(x)-g(x)\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overline{f}_i\,\overline{\psi_i(x)}-\overline{g(x)}\right]dx\\ &=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2|f_i|^2-2\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\,\overline{g_i}+\int_a^b |g(x)|^2 dx\end{aligned} \tag{5.3-37}$$

利用 $f(x)$关于$\{\varphi_i(x)\}$的 Fourier 系数 f_i 与 $g(x)$关于$\{\psi_i(x)\}$的 Fourier 系数 g_i 之间的关系式

$$f_i=\frac{1}{\lambda_i}g_i \tag{5.3-38}$$

式(5.3-37)可以进一步写成

$$\int_a^b |g_n(x)-g(x)|^2 dx=\int_a^b |g(x)|^2 dx-\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2|f_i|^2$$

由于 $\lambda_i f_i$ 是 $g(x)$关于$\{\psi_i(x)\}$的 Fourier 系数,所以当$\{\psi_i(x)\}$关于 $g(x)$是完备的时,成立

$$\int_a^b |g(x)|^2 dx=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2|f_i|^2 \tag{5.3-39}$$

这表明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |g_n-g(x)|^2 dx=0 \tag{5.3-40}$$

即级数 $g_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\psi_i$ 均值收敛于 $g(x)$。特别是,当 $g(x)$可写成形式

$$g(x)=\int_a^b \overline{k(y,x)}h(y)dy \tag{5.3-41}$$

时,由定理 5.3-1 知 $g(x)$可展开成绝对且一致收敛级数

$$g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}g_i\psi_i(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i f_i\psi_i(x) \tag{5.3-42}$$

即 $g_n(x)$一致收敛于 $g(x)$。

在 Schmidt-Picard 定理中，特征函数系的完备性起着重要作用，没有它就不能保证方程解的唯一性。只有当特征函数系对平方可积函数是完备的，才能保证第Ⅰ类积分方程在平方可积函数空间中存在唯一解。

例 9 讨论积分方程的可解性：

$$\int_0^1 (x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t = x+1 \tag{5.3-43}$$

解：积分核 $k(x,t)=x+t$ 是实对称的，且是退化的。从而第Ⅰ类积分方程(5.3-43)与第Ⅱ类积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 (x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{5.3-44}$$

的特征值与特征函数是相同的。

令
$$c_1=\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t,\quad c_2=\int_0^1 t\varphi(t)\mathrm{d}t$$

则式(5.3-44)可以改写成

$$\varphi(x)=\lambda c_1 x+\lambda c_2 \tag{5.3-45}$$

将式(5.3-45)代入 c_1,c_2 的表达式得

$$c_1=\frac{\lambda}{2}c_1+\lambda c_2$$

$$c_2=\frac{\lambda}{3}c_1+\frac{\lambda}{2}c_2$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix}1-\dfrac{\lambda}{2} & -\lambda\\ -\dfrac{\lambda}{3} & 1-\dfrac{\lambda}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

解之得
$$\lambda_1=-6+4\sqrt{3};\lambda_2=-6-4\sqrt{3}$$

相应特征函数：

$$\varphi_1(x)=\frac{1+\sqrt{3}x}{\sqrt{2+\sqrt{3}}},\varphi_2(x)=\frac{1-\sqrt{3}x}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$f_1=(f,\varphi_1)=\int_0^1 (x+1)\varphi_1(x)\mathrm{d}x=\frac{9+5\sqrt{3}}{6\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$f_2=(f,\varphi_2)=\int_0^1 (x+1)\varphi_2(x)\mathrm{d}x=\frac{9-5\sqrt{3}}{6\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

显然

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2|f_i|^2=\lambda_1^2|f_1|^2+\lambda_2^2|f_2|^2$$

是收敛的。

因而第Ⅰ类积分方程有解，

$$\varphi(x)=\lambda_1 f_1\varphi_1+\lambda_2 f_2\varphi_2=6x-2$$

但是由于$\{\varphi_i(x)\}$不是$[0,1]$上的完备函数系，故积分方程的解不是唯一的，见5.1节中例6的讨论。

例10 讨论积分方程的可解性

$$\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\sin^3\pi x$$

式中，$k(x,t)=\begin{cases}(1-x)t, & 0\leqslant t\leqslant x\\ x(1-t), & x\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$

解：积分核是实对称核，故第Ⅰ类积分方程的特征值与特征函数与第Ⅱ类积分方程的特征值与特征函数是相同的。即

$$\lambda_1=\pi^2,\lambda_2=(2\pi)^2,\cdots,\lambda_n=(n\pi)^2,\cdots$$

$$\varphi_1(x)=\sqrt{2}\sin\pi x,\varphi_2(x)=\sqrt{2}\sin 2\pi x,\cdots,\varphi_n(x)=\sqrt{2}\sin n\pi x,\cdots$$

另外，由三角函数公式知

$$\sin^3\pi x=\frac{3}{4}\sin\pi x-\frac{1}{4}\sin 3\pi x=\frac{3}{4\sqrt{2}}\varphi_1(x)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\varphi_3(x)$$

所以，$f_1=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}$；$f_3=\dfrac{-1}{4\sqrt{2}}$，其他 f_i 均为0。

由于级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2|f_i|^2=(\pi^2)^2\left(\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2+(9\pi^2)^2\left(\frac{-1}{4\sqrt{2}}\right)^2=\frac{45}{16}\pi^4$$

显然是收敛的，故第Ⅰ类积分方程有解。又因为特征函数系$\{\varphi_i(x)\}$是$[0,1]$上的完备的标准正交函数系，因此，第Ⅰ类积分方程在$L^2[a,b]$空间存在唯一解，即

$$\varphi(x)=\lambda_1 f_1\varphi_1(x)+\lambda_3 f_3\varphi_3(x)=\frac{3\pi^2}{4}(\sin\pi x-3\sin 3\pi x)$$

5.4 两种逐次逼近法

由于第Ⅰ类积分方程

$$\int_a^b k(x,t)g(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{5.4-1}$$

是可对称化的积分方程，即只要在积分方程两边同乘以$\overline{k(x,y)}$，再关于x从a到b积分，就可以化成具有对称核的第Ⅰ类积分方程

$$\int_a^b k_*(t,y)g(t)\mathrm{d}t=F(y) \tag{5.4-2}$$

因此，以下只考虑对称核积分方程(5.4-2)的求解方法。这里介绍两种逐次逼近解法。

(1) 第一种逐次逼近解法：

$$\begin{cases}g_n(x)=g_{n-1}(x)+F(x)-\int_a^b k_*(t,x)g_{n-1}(t)\mathrm{d}t\\ g_0(x)\in L^2[a,b]\end{cases} \tag{5.4-3}$$

由上述迭代公式，可得到序列

$$g_0(x), g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)$$

可以证明，当 $n\to\infty$ 时，$g_n(x)$ 趋于 $g(x)$，$\mathbf{K}_* g_n(x)$ 趋于 $F(x)$，而 $\mathbf{K}g_n(x)$ 趋于 $f(x)$。

定理 5.4-1 若方程(5.4-1)的解 $g(x)$ 存在，则当且仅当正交标准函数系 $\{\psi_i(x)\}$ 对于 $g(x)$ 是完备的时，由式(5.4-3)确定的函数序列 $g_n(x)$ 均值均值于 $g(x)$，特别是，若 $g(x)$ 还可表示成

$$g(x) = \int_a^b \overline{k(y,x)} h(y) \mathrm{d}y$$

式中，$h(y) \in L^2[a,b]$，则 $g_n(x)$ 一致收敛于 $g(x)$。此时，$\mathbf{K}_* g_n(x)$ 一致收敛于 $F(x)$。当且仅当 $\{\varphi_i(x)\}$ 对于 $f(x)$ 是完备的时，$\mathbf{K}g_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$。

上述定理的证明较复杂，这里略去证明过程。

第一种逐次积分法，仅要求积分核 $K_*(t,x)$ 是对称的，对 $k(x,t)$ 甚至没有对称性要求。下面介绍的第二种逐次逼近法，其要求要苛刻的多，不仅要求积分核 $k(x,t)$ 是对称的，而且必须是正定的。

(2) 第二种逐次逼近法：

$$\begin{cases} g_n(x) = g_{n-1}(x) + \lambda[f(x) - f_{n-1}(x)] \\ g_0(x) \in L_2[a,b], f_{n-1}(x) = \int_a^b k(x,s) g_{n-1}(s) \mathrm{d}s \end{cases} \tag{5.4-4}$$

在区间 $[a,b]$ 任取一平方可积函数，按上式迭代过程得到一个函数序列

$$g_0(x), g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x), \cdots$$

可以证明，当 $n\to\infty$ 时，$g_n(x)$ 均值收敛于 $g(x)$。

定理 5.4-2 设积分核 $k(x,t)$ 是实对称正定核，$f(x) \in L^2[a,b]$，若积分方程(5.4-1)的解存在，则当 $0<\lambda<2\lambda_{\min}$ 时，由式(5.4-4)确定的函数序列 $g_n(x)$ 均值收敛于积分方程的解 $g(x)$。

证明：将迭代公式(5.4-4)改写成

$$g_n(x) = g(x) + u_n(x) \tag{5.4-5a}$$

从而

$$g_{n-1}(x) = g(x) + u_{n-1}(x) \tag{5.4-5b}$$

两式相减得：

$$g_n(x) - g_{n-1}(x) = u_n(x) - u_{n-1}(x) \tag{5.4-6}$$

又由式(5.4-4)知

$$\begin{aligned} g_n(x) - g_{n-1}(x) &= \lambda[f(x) - f_{n-1}(x)] \\ &= \lambda\left[\int_a^b k(x,s) g(s) \mathrm{d}s - \int_a^b k(x,s) g_{n-1}(s) \mathrm{d}s\right] \\ &= \lambda \int_a^b k(x,s)[g(s) - g_{n-1}(s)] \mathrm{d}s \\ &= -\lambda \int_a^b k(x,s) u_{n-1}(s) \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{5.4-7}$$

所以

$$u_n(x) = u_{n-1}(x) - \lambda \int_a^b k(x,s) u_{n-1}(s) \mathrm{d}s \tag{5.4-8}$$

对式(5.4-8)两边同乘以积分核 $k(x,s)$ 的特征函数 $\{\varphi_i(x)\}$，并对 x 从 a 到 b 积分得

$$\int_a^b u_n(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u_{n-1}(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x - \lambda\int_a^b \varphi_i(x)\left[\int_a^b k(x,s)u_{n-1}(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b u_{n-1}(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x - \lambda\int_a^b u_{n-1}(s)\left[\int_a^b k(x,s)\varphi_i(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}s$$

$$= \int_a^b u_{n-1}(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{\lambda_i}\int_a^b u_{n-1}(s)\varphi_i(s)\mathrm{d}s \tag{5.4-9}$$

令

$$\alpha_{i,n} = \int_a^b u_n(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x \tag{5.4-10}$$

则式(5.4-9)可写成

$$\alpha_{i,n} = \alpha_{i,n-1} - \frac{\lambda}{\lambda_i}\alpha_{i,n-1} = \left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)\alpha_{i,n-1} \tag{5.4-11}$$

从而有

$$\alpha_{i,n} = \left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^n \alpha_{i,0} \tag{5.4-12}$$

由于正定核的特征函数系$\{\varphi_i(x)\}$是完备的，所以 Parseval 等式成立，

$$\int_a^b |u_n(x)|^2\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_{i,n}|^2 \tag{5.4-13}$$

当参数λ满足$0<\lambda<2\lambda_{\min}$时，有

$$0<\left|1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right|^2<1 \tag{5.4-14}$$

从而正项级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_{i,n}|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left|1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right|^{2n}|\alpha_{i,0}|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_{i,0}|^2 \tag{5.4-15}$$

收敛。

对于收敛的级数(5.4-15)，任意给定正数ε，总可以找到正整数$N_1(\varepsilon)$，使得当$n'>N_1(\varepsilon)$时，有

$$\sum_{i=n'}^{\infty}|\alpha_{i,n}|^2 \leqslant \sum_{i=n'}^{\infty}|\alpha_{i,0}|^2 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.4-16}$$

对于上面的$\varepsilon>0$，存在$N_2(\varepsilon)>0$，使当$n>N_2(\varepsilon)$时，有

$$\sum_{i=1}^{n'-1}|\alpha_{i,n}|^2 = \sum_{i=1}^{n'-1}\left|1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right|^{2n}|\alpha_{i,0}|^2 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.4-17}$$

考虑到不等式(5.4-16)和式(5.4-17)知，当N足够大时，有

$$\int_a^b |u_n(x)|^2\mathrm{d}x < \varepsilon \tag{5.4-18}$$

即

$$\int_a^b |g_n(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x < \varepsilon \tag{5.4-19}$$

这就证明了$g_n(x)$均值收敛于$g(x)$，证毕。

例 11 用逐次逼近法解积分方程

$$\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \sin\pi x$$

式中，$k(x,t) = \begin{cases}(1-x)t, & 0\leqslant t\leqslant x\\ (1-t)x, & x\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$

解:由于积分核 $k(x,t)$ 是对称核,因此,第Ⅰ类积分方程的特征值与特征函数与第Ⅱ类积分方程的特征值和特征函数是相同的。

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lambda\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \lambda\int_0^x (1-x)t\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \lambda\int_x^1 (1-t)x\varphi(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\lambda\int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \lambda(1-x)x\varphi(x) + \lambda\int_x^1 (1-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \lambda(1-x)x\varphi(x)\\ &= -\lambda\int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \lambda\int_x^1 (1-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= -\lambda x\varphi(x) - \lambda(1-x)\varphi(x)\\ &= -\lambda\varphi(x)\end{aligned}$$

特征值与特征函数可通过下列微分方程定解问题求得

$$\begin{cases}\varphi(x)'' + \lambda\varphi(x) = 0\\ \varphi(0) = 0;\varphi(1) = 0\end{cases}$$

$$\varphi(x) = c_1\cos\sqrt{\lambda}x + c_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

由 $\varphi(0)=0$ 得 $c_1=0$;由 $\varphi(1)=0$ 得 $\sin\sqrt{\lambda}=0$。故特征值

$$\lambda_k = (k\pi)^2,\ (k=1,2,3,\cdots)$$

相应的特征函数为

$$\varphi_k(x) = \sin k\pi x,\ (k=1,2,\cdots)$$

由于所有特征值都大于 0,且特征函数系是完备的,故积分核是对称正定核,在满足 $0<\lambda<2\pi$ 时,可用下列公式逐次逼近求解

$$\begin{cases}g_n(x) = g_{n-1}(x) + \lambda[f(x) - f_{n-1}(x)]\\ g_0(x)\in L_2[a,b],f_{n-1}(x) = \int_a^b k(x,s)g_{n-1}(s)\,\mathrm{d}s\end{cases}$$

取 $g_0(x)=0$ 作为零次近似,并取参数 $\lambda=1$,则得

$$g_1(x) = f(x) = \sin\pi x$$

$$g_2(x) = \sin\pi x\left[1 + \left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)\right]$$

$$g_3(x) = \sin\pi x\left[1 + \left(1-\frac{1}{\pi^2}\right) + \left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)^2\right]$$

$\cdots$

$$g_n(x) = \sin\pi x\left[1 + \left(1-\frac{1}{\pi^2}\right) + \cdots + \left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)^{n-1}\right] = \pi^2\left[1 - \left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)^n\right]\sin\pi x$$

令 $n\to\infty$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x) = \pi^2\sin\pi x$。即第Ⅰ类积分方程的解为

$$\varphi(x) = \pi^2\sin\pi x$$

5.5 第Ⅰ类 Volterra 型积分方程

考虑第Ⅰ类 Volterra 型积分方程

$$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \tag{5.5-1}$$

利用广义 Leibnitz(莱布尼兹)公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} F(x,t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x}F(x,t)\mathrm{d}t + F(x,\beta(x))\beta'(x) - F(x,\alpha(x))\alpha'(x) \quad (5.5\text{-}2)$$

得

$$k(x,x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) \quad (5.5\text{-}3)$$

当 $k(x,x)\neq 0$ 时,上式成为

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{k_x(x,t)}{k(x,x)}\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{f'(x)}{k(x,x)} \quad (5.5\text{-}4)$$

令

$$\hat{k}(x,t) = \frac{k_x(x,t)}{k(x,x)};F(x) = \frac{f'(x)}{k(x,x)}$$

则

$$\varphi(x) + \int_a^x \hat{k}(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = F(x) \quad (5.5\text{-}5)$$

这样就将第Ⅰ类 Volterra 积分方程化成了第Ⅱ类 Volterra 积分方程。下面说明这种变换是同解的。

式(5.5-4)或式(5.5-5)可看成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f'(x) \quad (5.5\text{-}6)$$

两边积分后得

$$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) + c \quad (5.5\text{-}7)$$

可见,只有当常数 $c=0$ 时,式(5.5-6)与式(5.5-1)才是同解的,为此要求

$$f(a) = 0 \quad (5.5\text{-}8)$$

此时,$c=0$,从而就保证了变换是同解的。

例 12 求解积分方程

$$\int_0^x \cos(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y = \sin x$$

解:因为 $f(0)=0$,故原积分方程等价于

$$\varphi(x) - \int_0^x \sin(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y = \cos x$$

由上述方程知 $\varphi(0)=1$。再对两边关于 x 求导 1 次得:

$$\varphi'(x) - \int_0^x \cos(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y = -\sin x$$

注意到原积分方程,得 $\varphi'(x)=0$,从而 $\varphi(x)=c$(常数)。又因为 $\varphi(0)=1$,所以

$$\varphi(x)\equiv 1$$

例 13 求解积分方程

$$\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

(1) $f(x)=x^2$;(2) $f(x)=\mathrm{e}^x-1$。

解:(1) 对原积分方程两边求导得

$$\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 2x \quad (5.5\text{-}9)$$

这仍为一个第Ⅰ类 Volterra 积分方程，再对两边求导 1 次得

$$\varphi(x)-\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t=2 \tag{5.5-10}$$

注意到原积分方程得

$$\varphi(x)=x^2+2 \tag{5.5-11}$$

(2) 积分方程两边对 x 求导得

$$\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x \tag{5.5-12}$$

这仍为一个第Ⅰ类 Volterra 积分方程，再对两边关于 x 求导 1 次得

$$\varphi(x)-\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x \tag{5.5-13}$$

注意到原积分方程，得

$$\varphi(x)=2\mathrm{e}^x-1 \tag{5.5-14}$$

但这个结果是错误的。这是因为式(5.5-9)和式(5.5-10)都与原积分方程是同解的，所以结果 $\varphi(x)=x^2+2$，当 $f(x)=x^2$ 时是正确的。而式(5.5-12)虽与原积分方程同解，但方程(5.5-13)与方程(5.5-12)并不同解，所以 $\varphi(x)=2\mathrm{e}^x-1$ 不是原积分方程的解。事实上，当 $x=0$ 时，方程(5.5-12)左端为 0，而右端为 1，故方程(5.5-12)无解。从而原积分方程也是无解的。

作为一个例子，下面讨论第Ⅰ类 Volterra 积分方程：Abel 方程的求解。Abel 积分方程可一般地写成

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}\mathrm{d}t=f(x),\ (0<\alpha<1) \tag{5.5-15}$$

其积分核 $k(x,t)=\dfrac{1}{(x-t)^\alpha}$ 在积分上限 x 处具有弱奇性。为消除弱奇性，在方程两边同乘以 $(u-x)^{\alpha-1}$，然后再对 x 从 0 到 u 取积分

$$\int_0^u \frac{\mathrm{d}x}{(u-x)^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}\mathrm{d}t=\int_0^u (u-x)^{\alpha-1}f(x)\mathrm{d}x \tag{5.5-16}$$

交换积分次序后得：

$$\int_0^u H(u,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f_1(u) \tag{5.5-17}$$

式中

$$f_1(u)=\int_0^u (u-x)^{\alpha-1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$H(u,t)=\int_t^u \frac{\mathrm{d}x}{(u-x)^{1-\alpha}(x-t)^\alpha}$$

作变量代换

$$x=\frac{u+t}{2}+\frac{u-t}{2}\cos y \tag{5.5-18}$$

则

$$x-t=\frac{u-t}{2}+\frac{u-t}{2}\cos y=\frac{u-t}{2}(1+\cos y)$$

$$u-x=\frac{u-t}{2}-\frac{u-t}{2}\cos y=\frac{u-t}{2}(1-\cos y)$$

从而

$$H(u,t)=\int_0^{\pi}\frac{\sin y\mathrm{d}y}{(1+\cos y)^{\alpha}(1-\cos y)^{1-\alpha}}$$

再作变量代换

$$1-\cos y=2z \tag{5.5-19}$$

则

$$H(u,t)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}z}{(1-z)^{\alpha}z^{1-\alpha}}=\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} \tag{5.5-20}$$

而

$$\begin{aligned}f_1(u)&=\int_0^u(u-x)^{\alpha-1}f(x)\mathrm{d}x\\&=-\int_0^u\frac{1}{\alpha}f(x)\mathrm{d}(u-x)^{\alpha}\\&=\frac{f(0)}{\alpha}u^{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\int_0^u(u-x)^{\alpha}f'(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{5.5-21}$$

将式(5.5-20)和式(5.5-21)代入式(5.5-17)得

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\int_0^u\varphi(t)\mathrm{d}t=\frac{f(0)}{\alpha}u^{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\int_0^u(u-x)^{\alpha}f'(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\varphi(u)&=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\frac{f(0)}{\alpha}u^{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\int_0^u(u-x)^{\alpha}f'(x)\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{u^{1-\alpha}}+\int_0^u\frac{f'(x)}{(u-x)^{1-\alpha}}\mathrm{d}x\right]\end{aligned} \tag{5.5-23}$$

这就是 Abel 积分方程的解。

习　题

1. 讨论积分方程的可解性

(1) $\int_0^{\pi}\sin(x+y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{2x}$

(2) $\int_0^{2\pi}\cos(x+y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\pi\cos x$

(3) $\int_0^1(4x-1)\varphi(y)\mathrm{d}y=x^3+2x$

2. 解下列积分方程

(1) $\int_0^1(x-y)\mathrm{e}^{x+y}\varphi(y)\mathrm{d}y=(x+2)\mathrm{e}^x$

(2) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta=1+x$

(3) $\int_0^x\sin(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y=x^2$

(4) $\int_0^x\mathrm{e}^{\beta(x-y)}\varphi(y)\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\alpha x}-1$，($\alpha,\beta$ 为常数且大于 0)

3. 用逐次逼近法解下列方程

$\int_0^{\pi}k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sin 2x$

式中，$k(x,t)=\begin{cases}\dfrac{t(\pi-x)}{\pi}, & 0\leqslant t\leqslant x\\ \dfrac{x(\pi-t)}{\pi}, & x\leqslant t\leqslant \pi\end{cases}$

（提示：取 $\varphi_0(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x$）

4. 求解积分方程

$$\int_0^\pi \left[a_0 t^2 + a_1 t(t-x) + \frac{a_2}{2}(t-x)^2\right]\varphi(t)\,\mathrm{d}t = x^2$$

式中，a_0, a_1, a_2 均为常数。

6 卷积核积分方程

6.1 傅里叶变换方法

定义 6.1-1 设 $f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义且绝对可积，即$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty$，在任一有限区间上满足狄利克雷条件，即

(1) 连续或只有有限个第一类间断点(可去间断点和跳跃间断点)；

(2) 只有有限个极值点，

则

$$F(\omega)=F[f(t)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t \tag{6.1-1}$$

称为函数 $f(t)$的傅里叶(Fourier)变换，而

$$f(t)=F^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{6.1-2}$$

称为函数 $F(\omega)$的傅里叶逆变换。

傅里叶变换有明确的物理意义，式(6.1-2)表明，非周期函数与周期函数一样，也是由许多不同频率的正余弦分量合成，所不同的是非周期函数包含了从零到无穷大的所有频率成分。而 $F(\omega)$是 $f(t)$中各频率成分的分布密度，因此称 $F(\omega)$为频率谱密度函数或连续频谱。

关于傅里叶变换的性质在许多教科书中都有论述，这里不加证明地总结如下：

(1) 线性性质：

设 $F(\omega)=F[f(t)]$, $G(\omega)=F[g(t)]$, α,β为常数，则

$$F[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha F(\omega)+\beta G(\omega) \tag{6.1-3}$$

$$F^{-1}[\alpha F(\omega)+\beta G(\omega)]=\alpha f(t)+\beta g(t) \tag{6.1-4}$$

(2) 位移性质：

设 $F(\omega)=F[f(t)]$，t_0,ω_0 为实常数，则

$$F[f(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-i\omega t_0}F(\omega) \tag{6.1-5}$$

$$F^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=\mathrm{e}^{i\omega_0 t}f(t) \tag{6.1-6}$$

(3) 相似性质：

设 $F(\omega)=F[f(t)]$，a 为非零常数，则

$$F[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{6.1-7}$$

(4) 微分性质：

若 $\lim_{|t|\to\infty}f^{(m)}(t)=0,(m=0,1,2,\cdots,n-1)$，则

$$F(f^{(n)}(t))=(i\omega)^n F[f(t)] \tag{6.1-8}$$

特别地，若 $\lim\limits_{|t|\to\infty} f(t)=0$，则 $F(f'(t))=i\omega F[f(t)]$。

对傅里叶逆变换有类似的微分性质，即

$$F^{-1}[F'(\omega)]=-itf(t)$$

(5) 积分性质：

设 $g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t$，若 $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=0$，则

$$F[g(t)]=\frac{1}{i\omega}F[f(t)] \tag{6.1-9}$$

$$F^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\omega} F(\omega)\mathrm{d}\omega\right]=-\frac{1}{it}f(t) \tag{6.1-10}$$

(6) 对称性质：

若 $F[f(t)]=F(\omega)$，则

$$F[F(t)]=f(-\omega) \tag{6.1-11}$$

(7) 帕塞瓦尔(Parseval)等式：

设 $F(\omega)=F[f(t)]$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{6.1-12}$$

一般地，若

$$F[f_1(t)]=F_1(\omega),\ F[f_2(t)]=F_2(\omega)$$

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_2(\omega)}F_1(\omega)\mathrm{d}\omega$$

(8)卷积定理：

设 $F_1(\omega)=F[f_1(t)],F_2(\omega)=F[f_2(t)]$，

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau)f_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

则

$$F[f_1(t)*f_2(t)]=\sqrt{2\pi}F_1(\omega)\cdot F_2(\omega) \tag{6.1-13}$$

$$F[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F_1(\omega)*F_2(\omega) \tag{6.1-14}$$

对逆变换有类似性质，即

$$F^{-1}[F_1(\omega)*F_2(\omega)]=\sqrt{2\pi}f_1(t)\cdot f_2(t)$$

$$F^{-1}[F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f_1(t)*f_2(t)$$

求解积分方程的傅里叶变换方法，就是利用傅里叶变换的性质将积分方程化成像空间的代数方程，解代数方程求出像函数后，再利用傅里叶变换的性质进行逆变换最终得到原积分方程的解。下面举例说明：

(1) 求第Ⅰ类卷积型 Fredholm 积分方程的解：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{6.1-15}$$

解：设 $K(\omega)=F[k(t)];\Phi(\omega)=F[\varphi(t)];F(\omega)=F[f(t)]$

两边作傅里叶变换得

$$\sqrt{2\pi}K(\omega)\Phi(\omega)=F(\omega) \tag{6.1-16}$$

当 $K(\omega)\neq 0$ 时，有

$$\Phi(\omega)=\frac{F(\omega)}{\sqrt{2\pi}K(\omega)} \tag{6.1-17}$$

故原积分方程的解为

$$\varphi(x)=F^{-1}[\Phi(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\omega)}{K(\omega)}e^{ix\omega}d\omega \tag{6.1-18}$$

(2) 求第Ⅱ类卷积型 Fredholm 积分方程的解：

$$\varphi(x)-\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-t)\varphi(t)dt=f(x) \tag{6.1-19}$$

解：设 $K(\omega)=F[k(t)]$；$\Phi(\omega)=F[\varphi(t)]$；$F(\omega)=F[f(t)]$

两边作傅里叶变换得

$$\Phi(\omega)-\sqrt{2\pi}K(\omega)\Phi(\omega)=F(\omega) \tag{6.1-20}$$

$$\Phi(\omega)=\frac{F(\omega)}{1-\sqrt{2\pi}K(\omega)} \tag{6.1-21}$$

故原积分方程的解为：

$$\varphi(x)=F^{-1}[\Phi(\omega)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\omega)}{1-\sqrt{2\pi}K(\omega)}e^{ix\omega}d\omega \tag{6.1-22}$$

(3) 求齐次卷积积分方程的解：

$$\varphi(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-t)\varphi(t)dt=0 \tag{6.1-23}$$

解：两边作傅里叶变换得

$$\Phi(\omega)=-\sqrt{2\pi}K(\omega)\Phi(\omega) \tag{6.1-24}$$

$$\left[1+\sqrt{2\pi}K(\omega)\right]\Phi(\omega)=0 \tag{6.1-25}$$

若要原积分方程有非平凡解，必须有

$$1+\sqrt{2\pi}K(\omega)=0 \tag{6.1-26}$$

即

$$1=-\int_{-\infty}^{+\infty}k(t)e^{-i\omega t}dt \tag{6.1-27}$$

设 $\omega_i,(i=1,2,\cdots,m)$ 为式(6.1-26)的 n 阶零点，则对式(6.1-27)两边关于 ω_i 作 $n-1$ 次微分得

$$0=\int_{-\infty}^{+\infty}k(t)(-it)^{p-1}e^{-i\omega_i t}dt,\ (p=2,3,\cdots,n) \tag{6.1-28}$$

即

$$0=\int_{-\infty}^{+\infty}k(t)\cdot(-t)^{p-1}e^{-i\omega_i t}dt,\ (p=2,3,\cdots,n) \tag{6.1-29}$$

从而

$$0=\int_{-\infty}^{+\infty}k(t)\left(-\frac{t}{x}\right)^{p-1}e^{-i\omega_i t}dt,\ (p=2,\cdots,n) \tag{6.1-30}$$

考虑到：

$$\left(1-\frac{t}{x}\right)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(-1)^i\left(\frac{t}{x}\right)^i \tag{6.1-31}$$

综合式(6.1-27)、式(6.1-30)和式(6.1-31)得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}k\ (t)\left(1-\frac{t}{x}\right)^{p-1}\mathrm{e}^{-i\omega_i t}\mathrm{d}t \tag{6.1-32}$$

令

$$t=x-s$$

则式(6.1-32)可以改写成

$$x^{p-1}\mathrm{e}^{i\omega_i x}=\int_{-\infty}^{+\infty}k\ (x-s)s^{p-1}\mathrm{e}^{i\omega_i s}\mathrm{d}s \tag{6.1-33}$$

上式表示对任意 $p,(p=2,3,\cdots,n)$ 和 $\omega_i,(i=1,2,\cdots,m)$，$x^{p-1}\mathrm{e}^{i\omega_i x}$ 都是积分方程的解，故原积分方程的通解为

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{n}C_{i,p}x^{p-1}\mathrm{e}^{i\omega_i x} \tag{6.1-34}$$

其中，$C_{i,p}$ 为任意常数。

例1 求积分方程

$$\varphi\ (x)=f\ (x)+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}k\ (x-t)\varphi\ (t)\mathrm{d}t \tag{6.1-35}$$

当

$$f\ (x)=\mathrm{e}^{-|x|}\ ;\ k\ (x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x},\ x<0\\ 0,\ \ x\geqslant 0\end{cases}$$

时的解。

解：$F\ (\omega)=F\left[f\ (t)\right]=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t|-i\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{+\infty}\right]\mathrm{e}^{-|t|-i\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(1-i\omega)t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(1+i\omega)t}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-i\omega}+\frac{1}{1+i\omega}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}$$

$$K(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(1-i\omega)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-i\omega}$$

对原积分方程两边作傅里叶变换得

$$\Phi\ (\omega)=F\ (\omega)+\lambda\ \sqrt{2\pi}K\ (\omega)\Phi\ (\omega)$$

$$\Phi\ (\omega)=\frac{F\ (\omega)}{1-\lambda\ \sqrt{2\pi}K\ (\omega)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{(1+i\omega)(1-\lambda-i\omega)}$$

上述复变函数有两个极点，即 $Z_1=+i$，$Z_2=-(1-\lambda)i$，假定 $0<\lambda<1$，则如图6.1-1所示，上下半平面各有一个极点，为方便利用Cauchy留数定理，作辅助围线 L_1 和 L_2。利用Jardan引理，则

在 $x\geqslant 0$ 时，

$$\varphi(x)=F^{-1}\left[\Phi(\omega)\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ix\omega}}{(1+i\omega)(1-\lambda-i\omega)}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}+\int_{L_1}\right]\frac{\mathrm{e}^{ix\omega}}{(1+i\omega)(1-\lambda-i\omega)}\mathrm{d}\omega$$

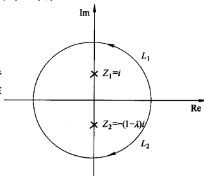


图6.1-1 复变函数积分辅助图

$$= \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[\frac{e^{ix\omega}}{(1+i\omega)(1-\lambda-i\omega)}, Z_1\right]$$

$$= 2i \cdot \frac{e^{-x}}{2-\lambda} \tag{6.1-36}$$

在 $x<0$ 时，

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} + \int_{L_2}\right]\frac{e^{ix\omega}}{(1+i\omega)(1-\lambda-i\omega)}d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[\frac{e^{ix\omega}}{(1+i\omega)(1-\lambda-i\omega)}, Z_2\right]$$

$$= 2i \cdot \frac{e^{(1-\lambda)x}}{2-\lambda} \tag{6.1-37}$$

式(6.1-36)和式(6.1-37)是积分方程的特解，下面求其对应齐次方程的解，为此，先考虑

$$1-\lambda\sqrt{2\pi}K(\omega) = 0 \tag{6.1-38}$$

即

$$\frac{1-\lambda-i\omega}{1-i\omega} = 0 \tag{6.1-39}$$

的零点，显然，上式只有一个一阶零点 $Z_0 = -(1-\lambda)i$，故齐次方程的通解为

$$\varphi(x) = Ce^{(1-\lambda)x} \tag{6.1-40}$$

而非齐次方程的通解为

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ce^{(1-\lambda)x} + \dfrac{2ie^{-x}}{2-\lambda}, & x \geqslant 0 \\ Ce^{(1-\lambda)x} + \dfrac{2ie^{(1-\lambda)x}}{2-\lambda}, & x<0 \end{cases} \tag{6.1-41}$$

例 2 求积分方程

$$\varphi(x) = e^{-|x|} + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|}\varphi(t)dt$$

的一个特解。

解：设

$$\Phi(\omega) = F[\varphi(t)]$$

$$F(\omega) = F[e^{-|x|}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-i\omega x}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)x}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+i\omega)x}dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}$$

$$K(\omega) = F[e^{-|x|}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2} \tag{6.1-42}$$

对原积分方程两边作傅里叶变换得

$$\Phi(\omega) = F(\omega) + \lambda\sqrt{2\pi}K(\omega)\Phi(\omega) \tag{6.1-43}$$

$$\Phi(\omega) = \frac{F(\omega)}{1-\lambda\sqrt{2\pi}K(\omega)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1-2\lambda+\omega^2}$$

$$\varphi(x)=F^{-1}[\Phi(\omega)]=F^{-1}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-2\lambda}}\right)^2}\right]\frac{1}{1-2\lambda}$$

注意到式(6.1-42)并利用傅里叶变换的相似性质,

$$F[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{6.1-44}$$

得

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x|},\ \left(\lambda\neq\frac{1}{2}\right) \tag{6.1-45}$$

例3 求齐次方程

$$\phi(x)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-t|}\phi(t)\mathrm{d}t$$

的解。

解:设

$$\Phi(\omega)=F[\phi(x)];\ K(\omega)=F[e^{-|x|}]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}$$

对原积分方程两边作傅里叶变换得

$$[1-\sqrt{2\pi}\lambda K(\omega)]\Phi(\omega)=0 \tag{6.1-46}$$

式中

$$1-\lambda\sqrt{2\pi}K(\omega)=\frac{1+\omega^2-2\lambda}{1+\omega^2}$$

可见积分方程的特征值为

$$\lambda=\frac{1}{2}(1+\omega^2)$$

当ω在$(0,\infty)$取值时,λ也取值于$(0,\infty)$,且连续充满$(0,\infty)$整个区间,此时,称积分方程具有连续谱。

(1) 当$\lambda<\frac{1}{2}$时,$1-\lambda\sqrt{2\pi}K(\omega)=0$有两个一阶零点,

$$\omega_{1,2}=\pm i\sqrt{1-2\lambda}$$

故原积分方程的通解为

$$\phi(x)=c_1e^{-\sqrt{1-2\lambda}x}+c_2e^{\sqrt{1-2\lambda}x}=d_1\cos(\sqrt{2\lambda-1}x)+d_2\sin(\sqrt{2\lambda-1}x) \tag{6.1-47}$$

(2) 当$\lambda>\frac{1}{2}$时,$1-\lambda\sqrt{2\pi}K(\omega)=0$有两个一阶零点,

$$\omega_{1,2}=\pm\sqrt{2\lambda-1}$$

故原积分方程的通解为

$$\phi(x)=c_1e^{-\sqrt{2\lambda-1}x}+c_2e^{\sqrt{2\lambda-1}x} \tag{6.1-48}$$

(3) 当$\lambda=\frac{1}{2}$时,$1-\lambda\sqrt{2\pi}K(\omega)=0$有一个两阶零点,

$$\omega=0$$

故原积分方程的通解为

$$\phi(x)=c_1+c_2x \tag{6.1-49}$$

若积分方程中的积分限为(0,∞),积分核为正弦或余弦函数,可以考虑采用傅里叶正弦变换或余弦变换。傅里叶正弦变换及其余弦变换定义如下:

$$F_s(\omega)=F_s\left[f(t)\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t \tag{6.1-50}$$

$$F_c(\omega)=F_c\left[f(t)\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t \tag{6.1-51}$$

$$f(t)=F_s^{-1}\left[F_s(\omega)\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(\omega)\sin(\omega t)\mathrm{d}\omega \tag{6.1-52}$$

$$f(t)=F_c^{-1}\left[F_c(\omega)\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\omega)\cos(\omega t)\mathrm{d}\omega \tag{6.1-53}$$

傅里叶正弦变换与余弦变换具有如下性质:当 $f(t)$是偶函数时,$F(\omega)=F_c(\omega)$;当 $f(t)$是奇函数时,$F(\omega)=-iF_s(\omega)$。

例 4 求积分方程

$$\int_0^\infty \varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x}$$

的解。

解:两端同乘以$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$得:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-x}$$

即

$$F_s\left[\varphi(t)\right]=F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\omega}$$

故

$$\begin{aligned}\phi(x)=F_s^{-1}\left[F_s(\omega)\right]&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\omega}\sin(\omega x)\mathrm{d}\omega\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\omega}\sin(\omega x)\mathrm{d}\omega\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\omega}\frac{1}{2i}\left[\mathrm{e}^{i\omega x}-\mathrm{e}^{-i\omega x}\right]\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty\left[\mathrm{e}^{-(1-ix)\omega}-\mathrm{e}^{-(1+ix)\omega}\right]\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{\pi i}\left[\frac{-1}{1-ix}\mathrm{e}^{-(1-ix)\omega}\Big|_0^\infty-\frac{-1}{1+ix}\mathrm{e}^{-(1+ix)\omega}\Big|_0^\infty\right]\\&=\frac{1}{\pi i}\left[\frac{1}{1-ix}-\frac{1}{1+ix}\right]\\&=\frac{2}{\pi}\frac{x}{1+x^2}\end{aligned}$$

例 5 讨论积分方程

$$\phi(x)=\int_0^\infty \varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t$$

的特征值与特征函数。

解:对傅里叶正弦变换

$$F_s(\omega)=F_s\left[f(t)\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t \tag{6.1-54}$$

其逆变换为

$$f(t)=F_s^{-1}\left[F_s(\omega)\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_s(\omega)\sin(\omega t)\mathrm{d}\omega$$

将变量 t 与 w 互换可以得到

$$f(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_s(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t \tag{6.1-55}$$

式(6.1-54)与式(6.1-55)等号两边相加得

$$F_s(\omega)+f(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left[F_s(t)+f(t)\right]\sin(\omega t)\mathrm{d}t \tag{6.1-56a}$$

式(6.1-54)与式(6.1-55)等号两边相减得

$$F_s(\omega)-f(\omega)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left[F_s(t)-f(t)\right]\sin(\omega t)\mathrm{d}t \tag{6.1-56b}$$

式(6.1-56a)表示对在$(0,\infty)$上绝对可积，且满足狄利克雷条件的任意函数 $f(t)$，函数 $f(t)+F_s(t)$是与积分方程的特征值

$$\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

对应的特征函数，而 $F_s(t)-f(t)$是与特征值 $\lambda=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 对应的特征函数。由于 $f(t)$的任意性，两个特征值的秩都是无穷，即对应的特征函数有无限个。这种特征值的秩是无穷大以及例 3 中的具有连续谱的积分方程都已经不属于 Fredholm 积分方程范畴，我们通常将它们归为奇异积分方程。因此，傅里叶变换的方法也可以求解某些积分区间为无穷的奇异积分方程。

6.2 拉普拉斯变换方法

定义 6.2-1 设函数 $f(t)$是定义在$[0,+\infty)$的实值函数，且满足：

(1) 在 $t\geqslant 0$ 的任何有限区间上分段连续。

(2) 在 $t\to+\infty$时，$f(t)$至多是指数级增长，即存在常数 $M>0$ 及 $c\geqslant 0$，使得

$$|f(t)|\leqslant Me^{ct},\ (0\leqslant t\leqslant+\infty)$$

则

$$F(s)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{6.2-1}$$

在复数半平面 $\mathrm{Re}(s)>c$ 上存在$(s=\beta+iw)$，并称 $F(s)$是 $f(t)$的拉普拉斯(Laplace)变换，记作 $F(s)=L\left[f(t)\right]$；相应地，$f(t)$为 $F(s)$的拉普拉斯逆变换，记作 $f(t)=L^{-1}[F(s)]$，

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s,\ (t>0) \tag{6.2-2}$$

其中，积分路径是 $F(s)$存在域内的任一条平行虚轴的直线 $\mathrm{Re}(s)=\beta$，并且要求 $F(s)$的所有奇点都在此直线的左边。

与傅里叶变换相比，拉普拉斯变换具有以下特点：

(1) 函数范围拓宽了。傅里叶变换要求函数 $f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积，拉普拉斯

变换对 $f(t)$不要求在$(0,+\infty)$绝对可积，只要其增长不超过指数级即可。

(2) 函数 $f(t)$的定义域是$(0,+\infty)$。

拉普拉斯变换具有如下性质：

(1) 线性性质：

设α,β为常数，且有 $F(s)=L[f(t)]$，$G(s)=L[g(t)]$，则有

$$L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha F(s)+\beta G(s) \tag{6.2-3}$$

$$L^{-1}[\alpha F(t)+\beta G(t)]=\alpha f(s)+\beta g(s) \tag{6.2-4}$$

(2) 相似性质：

设 $F(s)=L[f(t)]$，则对任意一常数 $a>0$ 有

$$L[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{6.2-5}$$

(3) 位移性质：

设 $F(s)=L[f(t)]$，则有

$$L[e^{at}f(t)]=F(s-a),(a\text{ 为复常数}) \tag{6.2-6}$$

(4) 延迟性质：

设 $F(s)=L[f(t)]$，$u(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$，则有

$$L[f(t-\tau)u(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s) \tag{6.2-7a}$$

$$L^{-1}[e^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)u(t-\tau) \tag{6.2-7b}$$

(5) 微分性质：

设 $F(s)=L[f(t)]$，则有

$$L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0) \tag{6.2-8}$$

特别地

$$L[f'(t)]=sF(s)-f(0) \tag{6.2-9}$$

对于像函数的导数，则有

$$F'(s)=L[tf(t)] \tag{6.2-10}$$

(6) 积分性质：

设 $F(s)=L[f(t)]$，则有

$$L\left[\underbrace{\int_0^t dt\int_0^t dt\cdots\int_0^t}_{n\text{次}} f(t)dt\right]=\frac{1}{s^n}F(s) \tag{6.2-11}$$

特别地

$$L\left[\int_0^x f(t)dt\right]=\frac{1}{s}F(s) \tag{6.2-12}$$

对于像函数的积分，则有

$$\int_s^\infty F(s)\,ds=L\left[\frac{f(t)}{t}\right] \tag{6.2-13}$$

$$\int_s^\infty ds_n\int_{s_n}^\infty\cdots\int_{s_2}^\infty F(s_1)ds_1=L\left[\frac{f(t)}{t^n}\right] \tag{6.2-14}$$

(7) 初值定理和终值定理：

设 $F(s)=L[f(t)]$，则有

$$f(0)=\lim_{s\to\infty}sF(s) \tag{6.2-15a}$$

$$f(+\infty)=\lim_{s\to 0}sF(s) \tag{6.2-15b}$$

（8）卷积定理：

设 $F_1(s)=L[f_1(t)]$，$F_2(s)=L[f_2(t)]$，且当 $t<0$ 时，$f_1(t)=f_2(t)=0$，

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6.2-16}$$

则有

$$L[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s) \tag{6.2-17a}$$

$$L^{-1}[F_1(s)F_2(s)]=f_1(t)*f_2(t) \tag{6.2-17b}$$

利用拉普拉斯卷积定理可以将第Ⅰ类和第Ⅱ类卷积型 Volterra 积分方程化成像空间的代数方程。求解代数方程后，利用拉普拉斯变换的性质，再对所得解进行拉普拉斯逆变换，即得原方程的解。

1）求解第Ⅰ类卷积型 Volterra 积分方程

$$\int_0^x k(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{6.2-18}$$

设

$$F(s)=L[f(t)];\ \Phi(s)=L[\varphi(t)];\ K(s)=L[k(t)]$$

两边作拉普拉斯变换可得

$$K(s)\Phi(s)=F(s) \tag{6.2-19}$$

当 $K(s)\neq 0$ 时，

$$\Phi(s)=\frac{F(s)}{K(s)} \tag{6.2-20}$$

故原积分方程的解为

$$\varphi(s)=L^{-1}[\Phi(s)]=L^{-1}\left[\frac{F(s)}{K(s)}\right] \tag{6.2-21}$$

2）求解第Ⅱ类卷积型 Volterra 积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x k(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{6.2-22}$$

设

$$F(s)=L[f(t)];\ \Phi(s)=L[\varphi(t)];\ K(s)=L[k(t)]$$

两边作拉普拉斯变换得

$$\Phi(s)=K(s)\Phi(s)+F(s) \tag{6.2-23}$$

当 $1-K(s)\neq 0$ 时，

$$\Phi(s)=\frac{F(s)}{1-K(s)}=F(s)+F(s)\frac{K(s)}{1-K(s)}=F(s)+F(s)M(s) \tag{6.2-24}$$

故原积分方程的解为

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=L^{-1}[\Phi(s)]=L^{-1}\left[\frac{F(s)}{1-K(s)}\right]\\&=L^{-1}\left[F(s)+F(s)\frac{K(s)}{1-K(s)}\right]\end{aligned}$$

$$= L^{-1}[F(s) + F(s)M(s)]$$

$$= f(x) + \int_0^x m(x-t)f(t)\mathrm{d}t \tag{6.2-25}$$

式中，$m(x) = L^{-1}[M(s)]$。

例 6 求积分方程的解

$$\int_0^x J_0(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \sin x$$

解:该积分方程的核为零阶第一类 Bessel 函数，其拉普拉斯变换为

$$K(s) = L[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

又

$$F(s) = L[\sin t] = \frac{1}{1+s^2}$$

对原积分方程两边作拉普拉斯变换可以得到

$$K(s)\Phi(s) = F(s)$$

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{K(s)} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

从而

$$\varphi(t) = L^{-1}[\Phi(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right] = J_0(t)$$

例 7 求积分方程的解

$$x^3 = \int_0^x \left[1 - 4(x-t) + \frac{3}{2}(x-t)^2\right]\varphi(t)\mathrm{d}t$$

解:利用拉普拉斯变换

$$L(t^m) = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} = \frac{m!}{s^{m+1}}$$

对积分方程两边作拉普拉斯变换得

$$\frac{3!}{s^4} = \left[\frac{1}{s} - \frac{4}{s^2} + \frac{3}{2}\frac{2!}{s^3}\right]\Phi(s)$$

$$6 = s(s^2 - 4s + 3)\Phi(s) = s(s-3)(s-1)\Phi(s)$$

$$\Phi(s) = \frac{3}{s}\left(\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-1}\right) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s-3} - \frac{3}{s-1}$$

再利用

$$L[\mathrm{e}^{at}] = \frac{1}{s-a}$$

作逆变换得

$$\varphi(x) = 2 + \mathrm{e}^{3x} - 3\mathrm{e}^{x}$$

例 8 求 Abel 积分方程的解

$$f(x) = \int_0^x (x-t)^{-\alpha}\phi(t)\mathrm{d}t,\ (0<\alpha<1)$$

解:设

$$\Phi(s) = L[\phi(t)];\ F(s) = L[f(t)]$$

$$K(s) = L[t^{-\alpha}] = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}}，\text{(查 Laplace 积分变换表)}$$

对方程两边作拉普拉斯变换得：

$$F(s)=K(s)\Phi(s)$$

故
$$\Phi(s)=\frac{F(s)}{K(s)}=\frac{s^{1-\alpha}F(s)}{\Gamma(1-\alpha)}$$

令 $\phi(x)=\varphi'(x)$，其中 $\varphi(0)=0$；则

$$\Phi(s)=s\cdot L[\varphi(t)]=s\cdot\psi(s)$$

故
$$\psi(s)=\frac{\Phi(s)}{s}=\frac{s^{-\alpha}F(s)}{\Gamma(1-\alpha)}$$

考虑到

$$L[t^{\alpha-1}]=s^{-\alpha}\Gamma(\alpha)$$

即
$$s^{-\alpha}=\frac{L[t^{\alpha-1}]}{\Gamma(\alpha)}$$

从而

$$\psi(s)=\frac{L[t^{\alpha-1}]\cdot F(s)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$$

作拉普拉斯逆变换得

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=L^{-1}[\psi(s)]=\{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\}^{-1}L^{-1}[L[t^{\alpha-1}]\cdot F(s)]\\&=\{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\}^{-1}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\phi(x)=\varphi'(x)&=[\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)]^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(0)}{\alpha}x^{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\int_0^x(x-t)^{\alpha}f'(t)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left[f(0)x^{\alpha-1}+\int_0^x\frac{f'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$

上式中利用了公式 $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$。

例 9 求积分方程

$$\phi(x)=f(x)+\int_0^{\infty}k(x-t)\phi(t)\mathrm{d}t$$

的解。其中，$k(x)=\begin{cases}\lambda x, & (x>0)\\0, & (x\leqslant 0)\end{cases}$。

解：$K(s)=L[k(t)]=\int_0^{\infty}\lambda t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{\lambda}{s^2}$，（亦可查积分变换表）

$$M(s)=\frac{K(s)}{1-K(s)}=\frac{\lambda}{s^2-\lambda}=\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\left(\frac{1}{s-\sqrt{\lambda}}-\frac{1}{s+\sqrt{\lambda}}\right)$$

故
$$m(x)=L^{-1}[M(s)]=\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x}-\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x})$$

考虑到原积分方程等价于

$$\phi(x)=f(x)+\int_0^x \lambda(x-t)\phi(t)\mathrm{d}t$$

两边作拉普拉斯变换得：

$$\Phi(s)=F(s)+K(s)\Phi(s)$$

从而

$$\Phi(s)=\frac{F(s)}{1-K(s)}=F(s)+F(s)\frac{K(s)}{1-K(s)}=F(s)+F(s)M(s)$$

故

$$\phi(x)=L^{-1}[\Phi(s)]=f(x)+\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\int_0^x f(t)\{\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}(x-t)}-\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}(x-t)}\}\mathrm{d}t$$

例 10 求积分方程

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\phi(t)\mathrm{d}t$$

的解。

解:设

$$\Phi(s)=L[\phi(t)];\ F(s)=L[f(t)]$$

且
$$K(s)=L[\lambda\mathrm{e}^t]=\lambda\int_0^\infty \mathrm{e}^{(1-s)t}\mathrm{d}t=-\frac{\lambda}{1-s}$$

故
$$M(s)=\frac{K(s)}{1-K(s)}=\frac{\lambda}{s-(1+\lambda)}$$

作逆变换

$$m(t)=L^{-1}[M(s)]=\lambda\mathrm{e}^{(1+\lambda)x}$$

从而积分方程的解为

$$\phi(x)=L^{-1}[F(s)+F(s)M(s)]=f(x)+\lambda\int_0^x \mathrm{e}^{(1+\lambda)(x-t)}f(t)\mathrm{d}t$$

例 11 求积分方程

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x \sin(x-t)\phi(t)\mathrm{d}t$$

的解。

解:设

$$\Phi(s)=L[\phi(t)];\ F(s)=L[f(t)]$$

且
$$K(s)=L[k(t)]=L[\lambda\sin t]=\frac{\lambda}{1+s^2},\text{(查积分变换表)}$$

故
$$M(s)=\frac{K(s)}{1-K(s)}=\frac{\lambda}{(1-\lambda)+s^2}$$

作逆变换得

$$m(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda}}\sin(\sqrt{1-\lambda}\cdot x), & \lambda<1\\ \lambda x, & \lambda=1\\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda-1}}\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda-1}\cdot x), & \lambda>1\end{cases}$$

故方程的解为

$$\phi(x)=f(x)+\int_0^x m(x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\begin{cases}f(x)+\dfrac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda}}\displaystyle\int_0^x f(t)\sin(\sqrt{1-\lambda}\cdot(x-t))\mathrm{d}t, & \lambda<1\\ f(x)+\lambda\displaystyle\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t, & \lambda=1\\ f(x)+\dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda-1}}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda-1}\cdot(x-t))\mathrm{d}t, & \lambda>1\end{cases}$$

例 12 求下列含卷积项的微分-积分方程:

$$\begin{cases}\phi''(x)+\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{2(x-t)}\phi'(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{2x}\\ \phi(0)=\phi'(0)=0\end{cases}$$

解:考虑到

$$L[\phi''(t)]=s^2\Phi(s)$$

$$L[\phi'(t)]=s\Phi(s)$$

$$L[\mathrm{e}^{at}]=\frac{1}{s-a}$$

对方程两边作拉普拉斯变换得

$$s^2\Phi(s)+\frac{1}{s-2}\cdot s\Phi(s)=\frac{1}{s-2}$$

$$\Phi(s)=\frac{1}{s(s-1)^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}$$

再作拉普拉斯逆变换得

$$\phi(x)=1-\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x$$

6.3 梅林变换方法

定义 6.3-1 设 $f(t)$在$(0,+\infty)$有定义,且对适当选取的数 σ_1,σ_2 满足条件

$$\int_0^1 |f(t)|t^{\sigma_1-1}\mathrm{d}t<+\infty \tag{6.3-1a}$$

$$\int_1^\infty |f(t)|t^{\sigma_2-1}\mathrm{d}t<+\infty \tag{6.3-1b}$$

则称

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)t^{s-1}\mathrm{d}t,\ (s=\sigma+i\tau,\ \sigma_1<\sigma<\sigma_2) \tag{6.3-2}$$

为 $f(t)$的梅林(Mellin)变换,记作 $F(s)=M[f(t)]$,而称

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(s)t^{-s}\mathrm{d}t,\ (t>0,\ \sigma_1<\sigma<\sigma_2) \tag{6.3-3}$$

为梅林逆变换,记作 $f(t)=M^{-1}[F(s)]$。

梅林变换具有下列性质:

(1) 设 $F(s)=M[f(t)]$,则对任意正整数 a 有

$$M[f(at)]=a^{-s}F(s) \tag{6.3-4}$$

(2) 乘幂定理：

设 $F(s)=M[f(t)]$，则 $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ 有

$$M[x^{\alpha}f(x)]=F(s+\alpha) \tag{6.3-5}$$

(3) 设 $F(s)=M[f(t)],G(s)=M[g(t)]$，则乘积 $f(t)g(t)$ 的梅林变换为

$$M[f(t)g(t)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(\tau)G(s-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6.3-6}$$

特别地，

$$\int_0^{\infty}f(t)g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(s)G(1-s)\mathrm{d}s \tag{6.3-7}$$

(4) 设 $F(s)=M[f(t)],G(s)=M[g(t)]$，则成立

$$M\left[x^{\alpha}\int_0^{\infty}t^{\beta}f(xt)g(t)\mathrm{d}t\right]=F(s+\alpha)G(1-s-\alpha+\beta) \tag{6.3-8}$$

特别地，当 $\alpha=0,\beta=0$ 时有

$$M\left[\int_0^{\infty}f(xt)g(t)\mathrm{d}t\right]=F(s)G(1-s) \tag{6.3-9}$$

或

$$M^{-1}[F(s)G(1-s)]=\int_0^{\infty}f(xt)g(t)\mathrm{d}t \tag{6.3-10}$$

(5) 微分定理：

设 $F(s)=M[f(t)]$，且存在

$$\lim_{x\to 0}x^{s-k-1}f^{(k)}(x)=0,\ (\alpha<\mathrm{Im}(s)<\beta;\ k=0,1,\cdots,n-1) \tag{6.3-11}$$

则

$$M[f^{(n)}(x)]=(-1)^n\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}F(s-n),\ (n=1,2,\cdots) \tag{6.3-12}$$

(6) 梅林卷积定理：

设 $F(s)=M[f(t)],G(s)=M[g(t)]$，则成立

$$M\left[\int_0^{\infty}f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}\right]=F(s)G(s) \tag{6.3-13}$$

式中，$(f*g)(x)=\int_0^{\infty}f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}$ 称为函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的梅林卷积，乘积 $F(s)G(s)$ 的逆变换为

$$M^{-1}[F(s)G(s)]=\int_0^{\infty}f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} \tag{6.3-14}$$

特别地，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(s)G(s)\mathrm{d}s=\int_0^{\infty}f(s)g\left(\frac{1}{s}\right)\frac{\mathrm{d}s}{s} \tag{6.3-15}$$

梅林变换主要用来求如下形式的两类积分方程的解。

(1) 求 Fox 积分方程

$$\phi(x)=f(x)+\int_0^{\infty}k(xt)\phi(t)\mathrm{d}t,\ (0<x<\infty) \tag{6.3-16}$$

的解。设

$$F(s)=M[f(t)];\ \Phi(s)=M[\phi(x)];\ K(s)=M[k(x)]$$

对方程两边作梅林变换得

$$\Phi(s)=F(s)+K(s)\Phi(1-s) \tag{6.3-17}$$

用 s 代替 $1-s$，上式亦可改写成

$$\Phi(1-s)=F(1-s)+K(1-s)\Phi(s) \tag{6.3-18}$$

将式(6.3-18)代入式(6.3-17)得：

$$\Phi(s)=\frac{F(s)+K(s)F(1-s)}{1-K(s)K(1-s)} \tag{6.3-19}$$

再作梅林逆变换，即得积分方程的解

$$\phi(x)=M^{-1}[\Phi(s)] \tag{6.3-20}$$

(2) 求含梅林卷积的积分方程

$$\phi(x)=f(x)+\int_0^{\infty}k\left(\frac{x}{t}\right)\phi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} \tag{6.3-21}$$

的解。设

$$\Phi(s)=M[\phi(t)],\ F(s)=M[f(t)],\ K(s)=M[k(t)]$$

对积分方程两边作梅林变换得

$$\Phi(s)=F(s)+K(s)\Phi(s) \tag{6.3-22}$$

当 $K(s)\neq 1$ 时，有

$$\Phi(s)=\frac{F(s)}{1-K(s)} \tag{6.3-23}$$

再作梅林逆变换即得积分方程的解

$$\phi(x)=M^{-1}[\Phi(s)] \tag{6.3-24}$$

例 13 求 Fox 积分方程的解：

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(xt)\phi(t)\mathrm{d}t,\ (0<x<\infty)$$

解： $K(s)=M[k(x)]=\lambda\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty}\sin x\cdot x^{s-1}\mathrm{d}x=\lambda\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\Gamma(s)\sin\left(\dfrac{\pi s}{2}\right)$

式中，$\Gamma(s)$为 Gamma 函数。

$$K(s)K(1-s)=\frac{2\lambda^2}{\pi}\Gamma(s)\Gamma(1-s)\sin\frac{\pi s}{2}\cos\frac{\pi s}{2}$$

$$=\lambda^2\Gamma(s)\Gamma(1-s)\frac{\sin\pi s}{\pi}=\lambda^2$$

上式利用了公式

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$$

当 $\lambda^2\neq 1$ 时，

$$\Phi(s)=\frac{F(s)+K(s)F(1-s)}{1-K(s)K(1-s)}$$

$$=\frac{F(s)}{1-\lambda^2}+\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}F(1-s)$$

利用梅林卷积定理得

$$\phi(x)=M^{-1}[\Phi(s)]=\frac{f(x)}{1-\lambda^2}+\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sin(xt)f(t)\mathrm{d}t$$

例 14 求积分方程

$$\phi(x)=\mathrm{e}^{-ax}+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{t}}\phi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t},(a>0)$$

的解。

解:对 $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}$ 作变量代换 $z=ax$,并求梅林变换:

$$F(s)=M[f(x)]=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}x^{s-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^s}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-z}z^{s-1}\mathrm{d}z=\frac{\Gamma(s)}{a^s}$$

当 $a=1$ 时,可得积分核的梅林变换:

$$K(s)=M[k(x)]=M\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\right]=\frac{1}{2}\Gamma(s)$$

从而

$$\Phi(s)=\frac{F(s)}{1-K(s)}=\frac{\Gamma(s)}{a^s\left[1-\frac{1}{2}\Gamma(s)\right]}$$

再对 $\Phi(s)$ 作逆变换,即可得积分方程的解

$$\phi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\Gamma(s)}{1-\frac{1}{2}\Gamma(s)}\frac{\mathrm{d}s}{(ax)^s},\ (\sigma>0)$$

习 题

1. 求 Lalesco-Picard 方程的解

$$\phi(x)=\cos\mu x+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x-s|}\phi(s)\mathrm{d}s,\ (\lambda<\frac{1}{2})$$

2. 求解积分方程

$$\phi(x)=f(x)+\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-t)^2}\phi(t)\mathrm{d}t$$

3. 解下列积分方程

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(xt)(xt)\phi(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{1+x^2},\ (x>0)$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(xt)\phi(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}$

4. 解下列积分方程

(1) $\phi(x)=\mathrm{e}^{2x}+\int_0^x\mathrm{e}^{t-x}\phi(t)\mathrm{d}t$

(2) $\phi(x)=x-\int_0^x(x-t)\phi(t)\mathrm{d}t$

(3) $\phi(x)=\mathrm{e}^x+\int_0^x\sin(x-t)\phi(t)\mathrm{d}t$

(4) $\phi(x)=\mathrm{e}^{2x}+\int_0^x(x-t)\mathrm{e}^{x-t}\phi(t)\mathrm{d}t$

5. 解下列积分方程

(1) $\int_0^x (x-t)\phi(t)\mathrm{d}t = \mathrm{ch}x - 1$

(2) $\int_0^x \cos(x-t)\phi(t)\mathrm{d}t = x\sin x$

(3) $\int_0^x (x-t)\sin(x-t)\phi(t)\mathrm{d}t = \sin^2 x$

(4) $\int_0^x \mathrm{sh}(x-t)\phi(t)\mathrm{d}t = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

6. 求解下列积分方程

(1) $\phi(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(xt)\phi(t)\mathrm{d}t$

(2) $\phi(x) = \cos x + \lambda\int_0^\infty J_0(2\sqrt{xt})\phi(t)\mathrm{d}t$

7 第Ⅱ类积分方程的数值方法

7.1 未知函数级数展开法

未知函数级数展开方法的基本思路是将未知函数按完备基函数展开,用含有待定系数的级数形式代替未知函数代入原积分方程,经化简后得到一组关于待定展开系数的线性代数方程组,从而实现将积分方程化成线性代数方程进行求解。设$\{u_i(x)\}$,$(i=1,2,\cdots)$是$L^2(a,b)$中的完备函数系,它们可以是正交的,也可以是非正交的。将待求未知函数$\varphi(x)$按$\{u_i(x)\}$展开,并用有限项作为$\varphi(x)$的近似,即

$$\varphi(x)\approx\sum_{i=1}^{N}a_iu_i(x) \tag{7.1-1}$$

式中,a_i是待定展开系数。将式(7.1-1)代入第Ⅱ类 Fredholm 积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t+f(x) \tag{7.1-2}$$

得

$$\sum_{i=1}^{N}a_iu_i(x)\approx\lambda\sum_{i=1}^{N}a_i\int_a^b k(x,t)u_i(t)\mathrm{d}t+f(x) \tag{7.1-3}$$

上式也可以改写成

$$\sum_{i=1}^{N}a_iu_i(x)-\lambda\sum_{i=1}^{N}a_i\int_a^b k(x,t)u_i(t)\mathrm{d}t-f(x)=R(x) \tag{7.1-4}$$

如果对任意$x\in(a,b)$,残差$R(x)\equiv0$,则我们就得到原积分方程的精确解,但是这通常难以做到。为此,我们可以放松对残差$R(x)$的这种严格要求。对残差$R(x)$的不同要求,导致下列确定展开系数$a_i(i=1,2,\cdots,N)$的不同数值方法。

7.1.1 配点法(Collocation point method)

仅要求残差$R(x)$在$[a,b]$区间上的N个孤立点x_i,$(i=1,2,\cdots,N)$处满足

$$R(x_i)=0,(i=1,2,\cdots,N) \tag{7.1-5}$$

这也相当于要求残差函数$R(x)$与函数序列

$$V_i(x)=\delta(x-x_i),(i=1,2,\cdots,N) \tag{7.1-6}$$

逐个正交,即

$$(R(x),V_i(x))=0,(i=1,2,\cdots,N) \tag{7.1-7}$$

如此,我们得到一组线性代数方程

$$\sum_{i=1}^{N}a_iu_i(x_k)-\lambda\sum_{i=1}^{N}a_i\int_a^b k(x_k,t)u_i(t)\mathrm{d}t=f(x_k),(k=1,2,\cdots,N) \tag{7.1-8}$$

即

$$\begin{pmatrix} u_{11}-\lambda k_{11} & u_{21}-\lambda k_{21} & \cdots & u_{N1}-\lambda k_{N1} \\ u_{12}-\lambda k_{12} & u_{22}-\lambda k_{22} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1N}-\lambda k_{1N} & u_{2N}-\lambda k_{2N} & \cdots & u_{NN}-\lambda k_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \tag{7.1-9}$$

式中，$u_{ik}=u_i(x_k)$，$k_{ik}=\int_a^b k(x_k,t)u_i(t)\mathrm{d}t$，$f_k=f(x_k)$，$(i,k=1,2,\cdots,N)$。求解上述线性方程组即可得展开系数 $a_i(i=1,2,\cdots,N)$。

7.1.2 矩量法(Method of moments)

矩量法不像配点法要求残差 $R(x)$ 在若干孤立点处为 0，而是要求残差 $R(x)$ 关于原点直到 N 阶的矩为零，即

$$\int_a^b R(x)x^k\mathrm{d}x=0,(k=1,2,\cdots,N) \tag{7.1-10}$$

这样也可以得到一组形如式(7.1-9)的线性代数方程，只是式中各符号的含义变成

$$u_{ik}=\int_a^b u_i(x)x^k\mathrm{d}x \tag{7.1-11}$$

$$k_{ik}=\int_a^b\left[\int_a^b k(x,t)u_i(t)\mathrm{d}t\right]x^k\mathrm{d}x \tag{7.1-12}$$

$$f_k=\int_a^b f(x)x^k\mathrm{d}x \tag{7.1-13}$$

7.1.3 Galerkin 法

设 $\{u_i(x)\}$，$(i=1,2,\cdots)$ 是 $L^2(a,b)$ 上的关于权函数 $\rho(x)$ 的完备正交函数系，即

$$\int_a^b \rho(x)u_i(x)u_j(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} c_i, i=j \\ 0, i\neq j \end{cases} \tag{7.1-14}$$

Galerkin 法要求残差函数 $R(x)$ 与 $\rho(x)u_i(x)$ 内积为 0，即

$$\int_a^b \rho(x)R(x)u_i(x)\mathrm{d}x=0,(i=1,2,\cdots,N) \tag{7.1-15}$$

此时，仍可得形如式(7.1-9)的线性代数方程组，其中各符号的含义变为

$$u_{ik}=\int_a^b \rho(x)u_i(x)u_k(x)\mathrm{d}x \tag{7.1-16}$$

$$k_{ik}=\int_a^b\left[\int_a^b k(x,t)u_i(t)\mathrm{d}t\right]\rho(x)u_k(x)\mathrm{d}x \tag{7.1-17}$$

$$f_k=\int_a^b f(x)\rho(x)u_k(x)\mathrm{d}x \tag{7.1-18}$$

7.1.4 最小二乘法(Least squares approximation)

要求残差函数 $R(x)$ 在 $L^2(a,b)$ 空间的范数最小，即

$$\min: \| R(x) \| = \left\{ \int_a^b |R(x)|^2\mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7.1-19}$$

这相当于将积分方程问题化成了一个变分问题。又因为

$$\begin{aligned} |R(x)|^2 &= (\mathbf{A}\varphi-f,\mathbf{A}\varphi-f) \\ &= (\mathbf{A}\varphi,\mathbf{A}\varphi)-2\mathrm{Re}(\mathbf{A}\varphi,f)+(f,f) \end{aligned} \tag{7.1-20}$$

式中
$$\mathbf{A}\varphi=\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$
若将
$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{N}a_k u_k(x) \tag{7.1-21}$$
代入式(7.1-20)，则变分问题又转化成求待定系数 a_k，$(k=1,2,\cdots,N)$ 使残差 $R(a_1,a_2,\cdots,a_N)$ 最小的最优化问题，根据优化问题的极值条件，
$$\frac{\partial}{\partial a_k}|R(x)|^2=2|R(x)|\frac{\partial}{\partial a_k}|R(x)|=0$$
很容易推出确定系数 a_k 的线性代数方程组如下：
$$\sum_{k=1}^{N}a_k(Au_k,Au_i)=(f,Au_i),(i=1,2,\cdots,N) \tag{7.1-22}$$
记
$$\begin{aligned}u_{ik}&=(Au_k,Au_i)=(u_k(x)-\lambda\int_b^a k(x,t)u_k(t)\mathrm{d}t)(\overline{u_i(x)}-\bar{\lambda}\int_b^a\overline{k(x,t)u_i(t)}\mathrm{d}t)\\&=\int_b^a u_k(x)\overline{u_i(x)}\mathrm{d}x-2\mathrm{Re}\left[\lambda\int_b^a\int_b^a k(x,t)u_k(t)\overline{u_i(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right]+\\&\quad|\lambda|^2\int_a^b\int_a^b\int_a^b k(x,t)\overline{k(x,s)}u_k(t)\overline{u_i(s)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{7.1-23}$$
$$f_i=(f,Au_i)=\int_a^b f(x)\overline{u_i(x)}\mathrm{d}x-\bar{\lambda}\int_a^b\int_a^b\overline{k(x,t)}f(x)\overline{u_i(t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}x \tag{7.1-24}$$
则式(7.1-22)可写成
$$\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}&\cdots&u_{1N}\\u_{21}&u_{22}&\cdots&u_{2N}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\u_{N1}&u_{N2}&\cdots&u_{NN}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_N\end{pmatrix} \tag{7.1-25}$$
上述几种数值方法可以用加权余量法(或加权残数法)统一起来，即对加权余量方程
$$\int_a^b R(x)\psi_i(x)\mathrm{d}x=0 \tag{7.1-26}$$
中的权函数 $\psi_i(x)$，可以有不同的取法。理论上权函数 $\psi_i(x)$，$(i=1,2,\cdots)$ 应该是 $L^2(a,b)$ 中的线性无关完备函数序列，如果对所有的 $\psi_i(x)$ 式(7.1-26)都成立，则只能是 $R(x)\equiv0$，从而得到积分方程的精确解。实际上，通常只取线性无关完备系列中的一部分 $\psi_i(x)$，$(i=1,2,\cdots,N)$，要求式(7.1-26)成立，从而得到的是近似解。权函数的不同选取方法导致了不同形式的加权余量法。现将上述讨论的各种方法列表总结如表7.1-1所示。

表7.1-1 常见加权余量法

方 法	加权余量方程	权 函 数
配点法	$\int_a^b R(x)\delta(x-x_j)\mathrm{d}x=0$	$\psi_j(x)=\delta(x-x_j)$
矩量法	$\int_a^b R(x)x^j\mathrm{d}x=0$	$\psi_j=x^j$
Galerkin 法	$\int_a^b R(x)\rho(x)u_j(x)\mathrm{d}x=0$	$\psi_j(x)=\rho(x)u_j(x)$
最小二乘法	$\int_a^b R(x)\frac{\partial R(x)}{\partial a_j}\mathrm{d}x=0$	$\psi_j(x)=\frac{\partial R(x)}{\partial a_j}$

7.2 积分核级数展开法

积分核级数展开法又称退化核近似方法。在第 3 章我们讲到退化核的积分方程可直接化成线性代数方程进行求解。为此,我们考虑这样的问题:任意核的积分方程能否用退化核的积分方程近似?这个问题的答案是肯定的。请看下面例题。

例 1 求积分方程的近似解

$$\phi(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(xt)\phi(t)\mathrm{d}t + x \tag{7.2-1}$$

解:根据三角函数的泰勒展开式

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \cdots \tag{7.2-2}$$

可将积分核改写成

$$\cos(xt) = 1 - \frac{1}{2}(xt)^2 + \frac{1}{4!}(xt)^4 - \cdots \tag{7.2-3}$$

如果用泰勒级数的前 N 项代替原函数,则积分核就变成了退化核。注意,这里应根据积分限的大小来适当确定保留的级数项数。一般地,若积分区间$[a,b]$是包含原点的小区间,保留的级数项数可少一些。若积分区间较大,则保留的级数项数应适当增大。因为,只有这样,用截断级数近似原函数才能保证足够精度。从而保证积分值的误差控制在合适的程度。这里为说明方法,仅取前 2 项,即

$$\tilde{k}(x,t) = 1 - \frac{1}{2}x^2t^2 \tag{7.2-4}$$

这样就可用退化核的积分方程

$$\phi(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \tilde{k}(x,t)\phi(t)\mathrm{d}t + x \tag{7.2-5}$$

的解,作为积分方程(7.2-1)的近似解。现在来求解退化核积分方程(7.2-5)

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{1}{2}x^2t^2\right]\phi(t)\mathrm{d}t + x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \phi(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}x^2 \int_0^{\frac{1}{2}} t^2\phi(t)\mathrm{d}t + x\end{aligned} \tag{7.2-6}$$

令

$$c_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \phi(t)\mathrm{d}t \tag{7.2-7a}$$

$$c_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} t^2\phi(t)\mathrm{d}t \tag{7.2-7b}$$

则式(7.2-6)变成

$$\phi(x) = c_1 - \frac{1}{2}c_2x^2 + x \tag{7.2-8}$$

将上式带入式(7.2-7)得

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{2}c_1 - \dfrac{1}{48}c_2 + \dfrac{1}{8} \\ c_2 = \dfrac{1}{24}c_1 - \dfrac{1}{320}c_2 + \dfrac{1}{64} \end{cases} \tag{7.2-9}$$

整理后得

$$\begin{cases}24c_1 + c_2 = 6\\ -40c_1 + 963c_2 = 15\end{cases} \tag{7.2-10}$$

解之得

$$c_1 = 0.2489, c_2 = 0.0259$$

从而

$$\phi(x) \approx 0.2489 + x - \frac{1}{2} \times 0.0259x^2 \tag{7.2-11}$$

从上例可以看出，利用退化核方法求积分方程近似解，关键的一步是怎样实现任意核用退化核来近似？上例中应用了积分核的泰勒展开式，这是通常采用的一种方法。除此之外，还有如下方法：

(1) 设函数序列$\{u_i(x)\}$，$(i = 1,2,\cdots)$是在$L^2(a,b)$中的标准正交完备函数系。则任意积分核$k(x,t) \in L^2(a,b)$可以展开为平均收敛的二重傅里叶级数

$$k(x,t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} c_{ij} u_i(x) u_j(t) \tag{7.2-12}$$

一般地，根据误差要求，可取级数前N项作为积分核$k(x,t)$的近似，从而得到近似的退化核

$$\tilde{k}(x,t) = \sum_{i,j=1}^{N} c_{ij} u_i(x) u_j(t) \tag{7.2-13}$$

式中，展开系数c_{ij}可根据函数序列的正交性得到，即

$$c_{ij} = \int_a^b \int_a^b k(x,t) \overline{u_i(x) u_j(t)} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{7.2-14}$$

(2) 若函数序列$\{u_i(x)\}$，$(i = 1,2,\cdots)$在$L^2(a,b)$中完备但不正交。任意核仍可用式(7.2-12)近似，只是展开系数c_{ij}不能由正交性直接得到。但可由下列原则确定

$$\min \int_a^b \int_a^b |k(x,t) - \tilde{k}(x,t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{7.2-15}$$

从而，系数c_{ij}可由下列方程确定

$$\sum_{i,j=1}^{N} c_{ij} \int_a^b u_i(x) \overline{u_{i'}(x)} \mathrm{d}x \int_a^b u_j(t) \overline{u_{j'}(t)} \mathrm{d}t = \int_a^b k(x,t) \overline{u_{i'}(x) u_{j'}(t)} \mathrm{d}x\mathrm{d}t, (i', j' = 1,2,\cdots,N) \tag{7.2-16}$$

最后，我们不加证明地给出，用退化核近似方法求积分方程近似解的误差估计定理。

定理 7.1-1 设$\tilde{k}(x,t)$是积分核$k(x,t)$的近似退化核，且有

$$\int_a^b |k(x,t) - \tilde{k}(x,t)| \mathrm{d}t < h \tag{7.2-17}$$

而以$\tilde{k}(x,t)$为积分核的积分方程的解核$R_l(x,t,l)$，成立

$$\int_a^b |R_l(x,t,l)| \mathrm{d}t < R \tag{7.2-18}$$

则积分方程

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b k(x,t) \phi(t) \mathrm{d}t + f(x) \tag{7.2-19}$$

的解 $\phi(x)$，与积分方程

$$\tilde{\phi}(x)=\lambda\int_a^b \tilde{k}(x,t)\tilde{\phi}(t)\mathrm{d}t+f(x) \tag{7.2-20}$$

的解 $\tilde{\phi}(x)$，满足

$$|\phi(x)-\tilde{\phi}(x)|<\frac{B|\lambda|(1+|\lambda|R)^2h}{1-|\lambda|h(1+|\lambda|R)} \tag{7.2-21}$$

式中，B 是 $f(x)$的一个上界。

定理 7.1-2 对于任意核 $k(x,t)$的退化核近似

$$k(x,t)=\tilde{k}(x,t)+\gamma(x,t) \tag{7.2-22}$$

设 $k(x,t)$，$\tilde{k}(x,t)$的解核分别为 $R_k(x,t)$，$R_{\tilde{k}}(x,t)$，相应的算子范数分别为 $\|R_k\|$，$\|R_{\tilde{k}}\|$，$\gamma(x,t)$对应的算子范数为 $\|\Gamma\|$，则成立

$$\|\phi(x)-\tilde{\phi}(x)\|\leqslant\|\Gamma\|(1+\|R_k\|)(1+\|R_{\tilde{k}}\|)\|f\| \tag{7.2-23}$$

例 2 用退化核替代任意核方法求积分方程近似解

$$y(x)=\int_0^1 \mathrm{sh}(xt)y(t)\mathrm{d}t+1-x^2$$

解：对积分核 $k(x,t)=\mathrm{sh}(xt)$用其泰勒级数的前三项的和替代，即

$$\mathrm{sh}(xt)=xt+\frac{(xt)^3}{3!}+\frac{(xt)^5}{5!}+\cdots$$

令

$$\alpha_1(x)=x,\quad \alpha_2(x)=x^3,\quad \alpha_3(x)=x^5$$

$$\beta_1(t)=t,\quad \beta_2(t)=\frac{1}{3!}t^3,\quad \beta_3(t)=\frac{1}{5!}t^5$$

$$f(x)=1-x^2$$

将积分核的泰勒级数的前三项和代入原积分方程，并令

$$c_i=\int_0^1 \beta_i(t)y(t)\mathrm{d}t$$

则有

$$y(x)=\sum_{i=1}^{3}c_i\alpha_i(x)+f(x)$$

再将上式代入 $c_i=\int_0^1 \beta_i(t)y(t)\mathrm{d}t$ 得

$$c_i=\int_0^1 \beta_i(t)\sum_{j=1}^{3}c_j\alpha_j(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 \beta_i(t)f(t)\mathrm{d}t$$

引入记号

$$f_i=\int_0^1 \beta_i(t)f(t)\mathrm{d}t$$

$$A_{ij}=\int_0^1 \alpha_j(t)\beta_i(t)\mathrm{d}t$$

从而

$$c_i-\sum_{j=1}^{3}c_jA_{ij}=f_i$$

式中

$$f_1=\int_0^1 \beta_1(t)f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}$$

$$f_2 = \int_0^1 \beta_2(t) f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{72}$$

$$f_3 = \int_0^1 \beta_3(t) f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2880}$$

$$A_{11} = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3},\ A_{12} = \int_0^1 t^4\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5},\ A_{13} = \int_0^1 t^6\,\mathrm{d}t = \frac{1}{7},$$

$$A_{21} = \int_0^1 \frac{1}{3!}t^4\,\mathrm{d}t = \frac{1}{30},\ A_{22} = \int_0^1 \frac{1}{3!}t^6\,\mathrm{d}t = \frac{1}{42},\ A_{23} = \int_0^1 \frac{1}{3!}t^8\,\mathrm{d}t = \frac{1}{54},$$

$$A_{31} = \int_0^1 \frac{1}{5!}t^6\,\mathrm{d}t = \frac{1}{840},\ A_{32} = \int_0^1 \frac{1}{5!}t^8\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1080},\ A_{33} = \int_0^1 \frac{1}{5!}t^{10}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1320}$$

得线性代数方程组

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{30} & 1-\frac{1}{42} & \frac{1}{54} \\ \frac{1}{840} & \frac{1}{1080} & 1-\frac{1}{1320} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{72} \\ \frac{1}{2880} \end{pmatrix}$$

解之得

$$c_1 = 0.3833, c_2 = 0.0273, c_3 = 0.0008$$

由此得近似解

$$y(x) = 0.3833x + 0.0273x^3 + 0.0008x^5 + (1 - x^2)$$

7.3 求积公式法(Quadrature formula method)

如果说未知函数展开法的主要思想是将未知函数近似用级数和来表示，积分核展开法的主要思想就是将积分核近似用级数和表示。而求积公式法的主要思想就是直接将积分用级数和来表示。让我们先从数值求积公式说起。

定义 7.3-1 在区间$[a,b]$上适当选取某些节点x_k，将用$f(x_k)$的加权平均的办法构造的求积公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \tag{7.3-1}$$

称为牛顿-科茨(Newton-Cotes)求积公式，式中，x_k $(k=0,1,2,\cdots,n)$称为求积节点，A_k $(k=0,1,2,\cdots,n)$称为求积系数。A_k仅仅与节点x_k的选取有关，而不依赖于被积函数$f(x)$的具体形式。牛顿-科茨求积公式中的求积节点x_k，通常是区间$[a,b]$上等距节点。此外，牛顿-科茨求积公式具有n次代数精度，即当$f(x)$是n次多项式时，求积公式是精确成立的。

下面将几种常用的求积公式列举如下：

(1) 矩形公式

求积节点：$x_k = a + (k-1)\dfrac{b-a}{n}, (k=1,2,\cdots,n)$ (7.3-2a)

求积系数：$A_k = \dfrac{b-a}{n}, (k=1,2,\cdots,n)$ (7.3-2b)

(2) 梯形公式

求积节点：$x_k = a + (k-1)\frac{b-a}{n-1}, (k=1,2,\cdots,n)$ (7.3-3a)

求积系数：$A_1 = A_n = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n-1}\right)$ (7.3-3b)

$$A_k = \frac{b-a}{n-1}, (k=2,3,\cdots,n-1) \tag{7.3-3c}$$

(3) Simpson 公式

求积节点：$x_{2k+1} = a + 2k\frac{b-a}{2n}, (k=0,1,2,\cdots,n)$ (7.3-4a)

求积系数：$A_1 = A_{2n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2n}\right)$ (7.3-4b)

$$A_{2k} = \frac{4}{3}\left(\frac{b-a}{2n}\right), (k=1,2,\cdots,n) \tag{7.3-4c}$$

$$A_{2k+1} = \frac{2}{3}\left(\frac{b-a}{2n}\right), (k=1,2,\cdots,n-1) \tag{7.3-4d}$$

现在考虑用牛顿-科茨公式(7.3-1)来求解第Ⅱ类 Fredholm 积分方程

$$\phi(x) - \lambda\int_a^b k(x,t)\phi(t)\mathrm{d}t = f(x) \tag{7.3-5}$$

首先，将各个求积节点 x_k 代入上式得

$$\phi(x_k) - \lambda\int_a^b k(x_k,t)\phi(t)\mathrm{d}t = f(x_k), (k=1,2,\cdots,n) \tag{7.3-6}$$

其次，利用牛顿-科茨公式(7.3-1)将上式中的积分运算用求和运算近似代替

$$\phi(x_k) - \lambda\sum_{i=1}^{n} A_i k(x_k,x_i)\phi(x_i) = f(x_k), (k=1,2,\cdots,n) \tag{7.3-7}$$

上式可以改写成

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \cdots & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{22} & \cdots & -\lambda k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \cdots & 1-\lambda k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \tag{7.3-8}$$

式中，$\phi_i = \phi(x_i)$，$f_i = f(x_i)$，$k_{ik} = A_k k(x_i,x_k)$。

类似地，对于第Ⅰ类 Fredholm 积分方程有

$$\begin{pmatrix} -\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \cdots & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & -\lambda k_{22} & \cdots & -\lambda k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \cdots & -\lambda k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \tag{7.3-9}$$

值得注意的是，对第Ⅰ类 Fredholm 积分方程，上述数值解法可能出现下述问题：

(1) 系数矩阵是病态的，导致数值求解过程不稳定，即等式右端的微小扰动，可能造成解的巨大变化。

(2) 原 Fredholm 积分方程无解，但经离散化之后的线性代数方程组却有解，从而导致错误的结果。

对于积分限含变量 x 的 Volterra 积分方程，可以看成是积分核为

$$k(x,t)=\begin{cases}k(x,t),(a\leqslant t\leqslant x\leqslant b)\\0, \quad (a\leqslant x<t\leqslant b)\end{cases} \tag{7.3-10}$$

的 Fredholm 积分方程，从而求积公式法也适用于 Volterra 积分方程。对第Ⅱ类 Volterra 积分方程

$$\phi(x)=\lambda\int_a^x k(x,t)\phi(t)\mathrm{d}t+f(x) \tag{7.3-11}$$

将求积节点 x_k 代入得

$$\phi(x_k)=\lambda\int_a^{x_k} k(x_k,t)\phi(t)\mathrm{d}t+f(x_k),(k=1,2,\cdots,n) \tag{7.3-12}$$

再代入求积公式，将积分运算用求和运算近似代替得

$$\phi(x_k)-\lambda\sum_{i=1}^{k}A_ik(x_k,x_i)\phi(x_i)=f(x_k),(k=1,2,\cdots,n) \tag{7.3-13}$$

引入符号

$$\phi_k=\phi(x_k),f_k=f(x_k),k_{ik}=A_kk(x_i,x_k)$$

上式可写成

$$\begin{pmatrix}1-\lambda k_{11} & & & \\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \cdots & 1-\lambda k_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix} \tag{7.3-14}$$

对第Ⅰ类 Volterra 积分方程，类似地可得

$$\begin{pmatrix}-\lambda k_{11} & & & \\ -\lambda k_{21} & -\lambda k_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \cdots & 1-\lambda k_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix} \tag{7.3-15}$$

可见对 Volterra 积分方程，用求积公式法得到线性代数方程组的系数矩阵是下三角矩阵。

定义 7.3-2 对于积分

$$I=\int_a^b\rho(x)f(x)\mathrm{d}x \tag{7.3-16}$$

式中，$\rho(x)$是$[a,b]$上的权函数，选择适当节点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使求积公式

$$\int_a^b\rho(x)f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k) \tag{7.3-17}$$

具有 $2n-1$ 阶代数精度，则式(7.3-17)称为高斯型求积公式，并称 x_k 为高斯点。

高斯型求积公式的特点是：首先，高斯点是非等距的，高斯点的确定稍困难；其次，代数精度高。依据权函数的不同形式，常用的几类高斯型求积公式如下：

(1) 高斯-勒让德(Gauss-Legendre)求积公式

$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k) \tag{7.3-18}$$

求积节点(高斯点)满足：

$$P_n(x_k)=0\ ,(k=1,2,\cdots,n) \tag{7.3-19a}$$

求积系数：

$$A_k = \frac{2(1-x_k^2)}{[nP_{n-1}(x_k)]^2}, (k=1,2,\cdots,n) \tag{7.3-19b}$$

式中，$P_n(x)$是 n 阶勒让德多项式。

(2) 高斯-拉盖尔(Gauss-Laguerre)求积公式

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{7.3-20}$$

求积节点满足：

$$L_n(x_k) = 0 , (k=1,2,\cdots,n) \tag{7.3-21a}$$

求积系数：

$$A_k = \frac{(n!)^2}{x_k [L'_n(x_k)]^2} , (k=1,2,\cdots,n) \tag{7.3-21b}$$

式中，$L_n(x)$是 n 阶拉盖尔多项式。

(3) 高斯-埃尔米特(Gauss-Hermitte)求积公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{7.3-22}$$

求积节点满足：

$$H_n(x_k) = 0 , (k=1,2,\cdots,n) \tag{7.3-23a}$$

求积系数：

$$A_k = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_k)]^2}, (k=1,2,\cdots,n) \tag{7.3-23b}$$

式中，$H_n(x)$是 n 阶埃尔米特多项式。

由于高斯型求积公式的特殊形式，使得利用高斯型求积公式可以求解某些积分限含有 $\pm\infty$的奇异积分方程。

7.4 边界元方法

在 7.3 节的求积公式法中，我们讨论的积分方程是

$$\phi(x) = \int_a^b k(x,t)\phi(t) dt + f(x), (x,t \in [a,b]) \tag{7.4-1}$$

其中的积分是一维线积分，且积分区间[a,b]通常是实轴上的有限区间。事实上，求积公式法也可以用于沿平面任意曲线积分的积分方程以及具有二维面积分的积分方程，如

$$\phi(s) = \int_l k(s,s')\phi(s') ds' + f(s), (s,s' \in l) \tag{7.4-2a}$$

$$\phi(r) = \int_\Gamma k(r,r')\phi(r') dr' + f(r) , (r,r' \in \Gamma) \tag{7.4-2b}$$

式中，l 是平面任意有限曲线，s,s'是曲线上的任意点。Γ 是围成空间区域 Ω 的任意曲面，r 和 r'为表面 Γ 上的任意点。当积分区间[a,b]是实轴上的有限区间时，求积公式法不会遇到什么困难，但当积分曲面是平面任意一条有限长度的曲线 l 时，或当积分曲面是空间任意曲面 Γ 时，求积公式法就变得相当复杂，除了二维数值积分引起的复杂性外，还有坐标变换引出的一系列问题。本节介绍的边界元方法特别适用于上述提及的沿一维平面曲线和二维空间曲面积分的积分方程。方法的本质和求积公式法是一样的，但具体实施有一套完整的程序，已形成固定的模式，并形成求解边界积分方程的通用方法，故单独一节讨论这种方法。

边界元方法的基本思想是将边界进行离散,以离散单元节点的函数值作为基本未知量,基于求积公式,将积分方程化成线性代数方程组进行求解。

边界元的具体实施包括如下几个部分:

(1) 边界离散。对一维曲线边界的离散相对简单,可以是等距的,也可以是非等距的。对于二维曲面的离散,单元形状可以是曲边四边形,也可以是曲边三角形,根据具体情况,也可能部分边界离散成四边形,另一部分边界离散成三角形。为了便于识别这样离散的单元和节点,应对它们进行适当编号,例如 $i=1,2,\cdots,N$ 表示总的 N 个离散单元,对节点的编号应该注意总体节点编号 ($j=1,2,\cdots,M$) 与单元节点编号 ($j'=1,2,\cdots,m$) 的区别。见图 7.4-1~图 7.4-3。

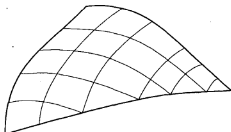


图 7.4-1 二维曲面边界的离散

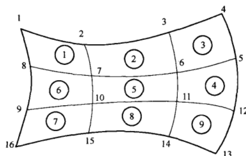


图 7.4-2 总体单元与节点编号

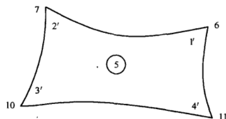


图 7.4-3 总体节点编号(6,7,10,11)与单元节点编号(1′,2′,3′,4′)

(2) 单元矩阵计算。单元的基本未知量是待求函数在节点处的函数值 $\phi_{j'}^{(i)}$,其中,i 为单元的编号 ($i=1,2,\cdots,N$),j' 为单元中节点的编号 ($j'=1,2,\cdots,m$),单元 Γ_i 中任意一点 (x,y) 处的函数值 $\phi(x,y)$ 可以通过节点处的函数值进行线性或二次插值得到,即

$$\phi(x)=\sum_{j'=1}^{m}\varphi_{j'}^{(i)}(x)\phi_{j'}^{(i)},(\text{一维}) \tag{7.4-3}$$

或者

$$\phi(x,y)=\sum_{j'=1}^{m}\varphi_{j'}^{(i)}(x,y)\phi_{j'}^{(i)},(\text{二维}) \tag{7.4-4}$$

式中，$\varphi_{j'}^{(i)}(x)$和 $\varphi_{j'}^{(i)}(x,y)$满足

$$\varphi_{j'}^{(i)}(x_j)=\begin{cases}1, & (j=j')\\ 0, & (j\neq j')\end{cases} \tag{7.4-5}$$

$$\varphi_{j'}^{(i)}(x_j,y_j)=\begin{cases}1, & (j=j')\\ 0, & (j\neq j')\end{cases} \tag{7.4-6}$$

然后计算

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_i}k(x_k,t)\phi(t)\mathrm{d}t &= \int_{\Gamma_i}k(x_k,t)\sum_{j'=1}^{m}\varphi_{j'}^{(i)}(t)\phi_{j'}^{(i)}\mathrm{d}t\\ &=\sum_{j'=1}^{m}\left[\int_{\Gamma_i}k(x_k,t)\varphi_{j'}^{(i)}(t)\mathrm{d}t\right]\cdot\phi_{j'}^{(i)}\\ &=(a_{k1}^{(i)},a_{k2}^{(i)},\cdots,a_{km}^{(i)})\begin{pmatrix}\phi_1^{(i)}\\ \phi_2^{(i)}\\ \vdots\\ \phi_m^{(i)}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{7.4-7}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_i}k(x_k,y_k,x',y')\phi(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' &= \int_{\Gamma_i}k(x_k,y_k,x',y')\sum_{j'=1}^{m}\varphi_{j'}^{(i)}(x',y')\phi_{j'}^{(i)}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\\ &=\sum_{j'=1}^{m}\left[\int_{\Gamma_i}k(x_k,y_k,x',y')\varphi_{j'}^{(i)}(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\right]\cdot\phi_{j'}^{(i)}\\ &=(a_{k1}^{(i)},a_{k2}^{(i)},\cdots,a_{km}^{(i)})\begin{pmatrix}\phi_1^{(i)}\\ \phi_2^{(i)}\\ \vdots\\ \phi_m^{(i)}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{7.4-8}$$

式中

$$a_{kj'}^{(i)}=\int_{\Gamma_i}k(x_k,t)\varphi_{j'}^{(i)}(t)\mathrm{d}t,(\text{一维})$$

$$a_{kj'}^{(i)}=\int_{\Gamma_i}k(x_k,y_k,x',y')\varphi_{j'}^{(i)}(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y',(\text{二维})$$

Γ_i 为第 i 个离散单元。在计算单元矩阵时，可利用各种求积公式。称 $a_k^{(i)}=(k_{k1}^{(i)},k_{k2}^{(i)},\cdots,k_{km}^{(i)})$为单元矩阵。

(3) 总体矩阵的装配：

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma}k(x_k,t)\phi(t)\mathrm{d}t &=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_i}k(x_k,t)\phi(t)\mathrm{d}t\\ &=\sum_{i=1}^{n}(a_{k1}^{(i)},a_{k2}^{(i)},\cdots,a_{km}^{(i)})\begin{pmatrix}\phi_1^{(i)}\\ \phi_2^{(i)}\\ \vdots\\ \phi_m^{(i)}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{r_1} a_{k1}^{(i)}, \sum_{i=1}^{r_2} a_{k2}^{(i)}, \cdots, \sum_{i=1}^{r_M} a_{kM}^{(i)}\right) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_M \end{pmatrix}$$

$$= (a_{k1}, a_{k2}, \cdots, a_{kM}) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_M \end{pmatrix} \tag{7.4-9}$$

式中，$r_i(i=1,2,\cdots,M)$为第 i 个节点所在的单元数目。记

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MM} \end{pmatrix} \tag{7.4-10}$$

称之为总体矩阵，$[\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_M]^T$ 为待求函数在总的 M 个离散节点上的函数值。

(4) 线性代数方程组的形成

下述积分方程

$$\phi(s) + \int_l k(s,s')\phi(s')\mathrm{d}s' = f(s) \tag{7.4-11}$$

离散化以后，所得代数方程即为

$$(I) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_M \end{pmatrix} + (A) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix} \tag{7.4-12}$$

$$[(I) + (A)] \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix} \tag{7.4-13}$$

式中，$[f_1, f_2, \cdots, f_M]$为 $f(x)$在总的 M 个离散节点处的值。

下面重点讨论单元矩阵的计算。为了便于利用一维或二维的高斯求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)w_k \tag{7.4-14}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)w_i w_j \tag{7.4-15}$$

式中，x_i, y_j 为高斯求积节点，w_i, w_j 为高斯求积系数。采用等参单元是方便的，它将平面任意曲线单元映射成直线单元，平面任意四边形单元映射成矩形单元。现以一维和二维的线性单元为例进行说明。

对于直角坐标系下的曲线单元，建立新的坐标 ξ_1 对应于(x_1, y_1)，ξ_2 对应于(x_2, y_2)，见图 7.4-4，曲线上任意一点(x, y)的坐标可由端点坐标插值得到

$$\begin{cases} x = \varphi_1(\xi)x_1 + \varphi_2(\xi)x_2 \\ y = \varphi_1(\xi)y_1 + \varphi_2(\xi)y_2 \end{cases} \tag{7.4-16}$$

为了做到

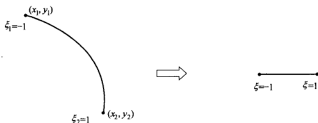


图 7.4-4 一维曲线单元与一维等参单元

$$\begin{cases} x(\xi_i) = x_i \\ y(\xi_i) = y_i \end{cases}, (i = 1,2) \tag{7.4-17}$$

并且

$$\xi_1 = -1, \quad \xi_2 = 1 \tag{7.4-18}$$

应该取

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{1}{2}(1-\xi) \\ \varphi_2 = \dfrac{1}{2}(1+\xi) \end{cases} \tag{7.4-19}$$

可见 $\varphi_i(\xi)$满足

$$\varphi_i(\xi_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{7.4-20}$$

一般地，称 $\varphi_i(\xi)$为单元的插值基函数或单元的形函数。

同样，单元上任一点的函数值也可以由端点的函数值插值得到，并且为了满足

$$f(\xi_i) = f(x_i, y_i) \tag{7.4-21}$$

应有

$$f(\xi) = \varphi_1(\xi) f_1 + \varphi_2(\xi) f_2 \tag{7.4-22}$$

又

$$\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\xi}x_1 + \frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}\xi}x_2\right]\mathrm{d}\xi \tag{7.4-23a}$$

$$\mathrm{d}y = \left[\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\xi}y_1 + \frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}\xi}y_2\right]\mathrm{d}\xi \tag{7.4-23b}$$

所以

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}\xi}x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{2}\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}\xi}y_i\right)^2}\,\mathrm{d}\xi = |J|\,\mathrm{d}\xi \tag{7.4-24}$$

从而

$$\begin{aligned} \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} f(x,y)\,\mathrm{d}l &= \int_{-1}^{1} f(x(\xi), y(\xi))\,|J|\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-1}^{1} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\omega_k \end{aligned} \tag{7.4-25}$$

对于二维问题，我们以曲边四边形为例进行说明，如图 7.4-5 单元内任一点的坐标(x,

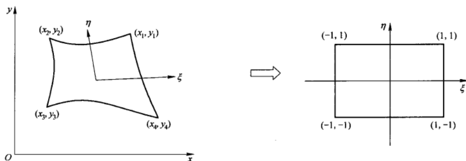


图 7.4-5　二维曲面单元与二维等参单元(Serendepity elements)

y,z)可用节点的坐标(x_i,y_i,z_i)，$(i=1,2,3,4)$表示为

$$\begin{cases} x=\sum_{i=1}^{4}\varphi_i\ (\xi,\eta)x_i \\ y=\sum_{i=1}^{4}\varphi_i\ (\xi,\eta)y_i \\ z=\sum_{i=1}^{4}\varphi_i\ (\xi,\eta)z_i \end{cases} \tag{7.4-26}$$

而在点(x,y,z)的函数值$f(x,y,z)$亦可以用函数在节点处的值f_i，$(i=1,2,3,4)$插值得到

$$f\ (x,y,z)=\sum_{i=1}^{4}\varphi_i(\xi,\eta)f_i \tag{7.4-27}$$

要满足

$$\begin{cases} x_i=x\ (\xi_i,\eta_i) \\ y_i=y\ (\xi_i,\eta_i),(i=1,2,3,4) \\ z_i=z\ (\xi_i,\eta_i) \end{cases} \tag{7.4-28}$$

和

$$f_i=f\ (\xi_i,\eta_i) \tag{7.4-29}$$

需要

$$\varphi_i\ (\xi_j,\eta_j)=\delta_{ij} \tag{7.4-30}$$

即

$$\varphi_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \tag{7.4-31a}$$

$$\varphi_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \tag{7.4-31b}$$

$$\varphi_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \tag{7.4-31c}$$

$$\varphi_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{7.4-31d}$$

考虑到二维情况下的面积分微元

$$
\mathrm{d}\Gamma = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}\right| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{vmatrix} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = |G| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{7.4-32}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_i} f(x,y,z)\mathrm{d}\Gamma &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta),z(\xi,\eta))\,|G|\,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g(\xi_i,\eta_j) w_i w_j
\end{aligned} \tag{7.4-33}
$$

一维曲线单元和二维等参单元的几种常见形函数分别见表 7.4-1 和表 7.4-2。

表 7.4-1　几种常见一维曲线单元的形函数

单 元 名 称	等参单元节点	插值基函数或形函数
常单元	1	$\varphi_1(\xi)=1$
线性单元	1 ($\xi=-1$)　2 ($\xi=1$)	$\varphi_1(\xi)=\frac{1}{2}(1-\xi)$ $\varphi_2(\xi)=\frac{1}{2}(1+\xi)$
2 次单元	1 ($\xi=-1$)　3 ($\xi=0$)　2 ($\xi=1$)	$\varphi_1(\xi)=\frac{1}{2}\xi(1-\xi)$ $\varphi_2(\xi)=\frac{1}{2}\xi(1+\xi)$ $\varphi_3(\xi)=1-\xi^2$

表 7.4-2　几种常见二维等参单元的形函数

等参单元节点	插值基函数或形函数 φ_i
4 节点矩形单元：节点 1, 2, 3, 4；坐标轴 ξ, η，原点 O	$\varphi_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$ $\varphi_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$ $\varphi_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$ $\varphi_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$
8 节点矩形单元：节点 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8；坐标轴 ξ, η，原点 O	$\varphi_1=-\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$ $\varphi_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$ $\varphi_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$ $\varphi_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\eta-\xi-1)$ $\varphi_5=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$ $\varphi_6=\frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$ $\varphi_7=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$ $\varphi_8=\frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)$

7.5 迭代方法

对于 Volterra 积分方程,还可以采用迭代方法进行数值求解。考虑第Ⅱ类 Volterra 积分方程

$$\phi(x)=\int_a^x k(x,t)\phi(t)\mathrm{d}t+f(x),(a\leqslant t\leqslant x\leqslant b) \tag{7.5-1}$$

假定其解 $\phi(x)$,以及 $f(x)$和 $k(x,t)$均为$[a,b]$区间上的连续函数,并设分点 $x_0=a,x_1=a+h,\cdots,x_k=a+kh,\cdots,a+Nh=x$($h$ 是步长)。根据求积公式

$$\int_a^x F(s)\mathrm{d}s\approx\sum_{k=0}^{N}A_kF(x_k) \tag{7.5-2}$$

第Ⅱ类 Volterra 积分方程可离散成下列形式

$$\phi(a+Nh)=\sum_{k=1}^{N}A_kk(a+Nh,a+kh)\phi(a+kh)+f(a+Nh) \tag{7.5-3}$$

上式可进一步改写成迭代形式

$$\begin{cases}\phi(a+Nh)=\dfrac{1}{1-A_Nk(a+Nh,a+Nh)}\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}A_kk(a+Nh,a+kh)\phi(a+kh)+f(a+Nh)\right]\\ \phi(a)=f(a)\end{cases} \tag{7.5-4}$$

即从初值 $\phi(a)=f(a)$,可依次求出 $\phi(a+h),\phi(a+2h),\cdots,\phi(a+Nh)$。特别地,把等距求积公式(7.5-2)取成复化梯形公式,则式(7.5-4)成为

$$\phi(a+Nh)=\frac{1}{1-\dfrac{h}{2}k(a+Nh,a+Nh)}\times\left[h\sum_{k=1}^{N-1}k(a+Nh,a+kh)\phi(a+kh)+\right.$$
$$\left.\frac{h}{2}k(a+Nh,a)\phi(a)+f(a+Nh)\right] \tag{7.5-5}$$

例 3 在区间$[0,2]$上,使用 $n=20$ 的复化梯形公式求积分方程

$$\phi(x)=\int_0^x\frac{1}{5}xt\phi(t)\mathrm{d}t+x,(x>0)$$

的近似解。

解:根据原积分方程可知,$\phi(0)=0$,利用迭代公式(7.5-5)知

$$\left[1-0.05\times\frac{1}{5}(0.1)^2\right]\phi(0.1)=0.1+0.05\times\frac{1}{5}\times0.1\times0\times\phi(0)=0.1$$

因此,$\phi(0.1)=0.10001$。同样可以得到

$$\phi(0.2)=0.20012$$
$$\phi(0.3)=0.30057$$
$$\vdots$$
$$\phi(1.9)=3.00564$$
$$\phi(2.0)=3.41463$$

原积分方程的精确解为

$$\phi^*(x)=x\exp\left(\frac{x^3}{15}\right)$$

因此可得误差估计

$$\phi(0.3)-\phi^*(0.3)=0.30057-0.30054=0.00003$$

$$\phi(1.9)-\phi^*(1.9)=3.00564-3.00152=0.00412$$

若要提高迭代法的精度，必须用高阶求积公式来代替复化梯形公式，但是使用高阶求积公式必须有一个特殊的开始方法，最常用的是戴依方法(Day method)，计算 $\phi(h)$，$\phi(2h)$，$\phi(3h)$的公式有

$$\phi(h)=\frac{h}{6}\left[k(h,0)f(0)+4k\left(h,\frac{1}{2}h\right)\phi_{13}+k(h,h)\phi_{12}\right]+f(h)$$

式中 $\phi_{13}=\frac{1}{4}h\left[k\left(\frac{1}{2}h,0\right)f(0)+k\left(\frac{1}{2}h,\frac{1}{2}h\right)\left(\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}\phi_{12}\right)\right]+f\left(\frac{1}{2}h\right)$；

$\phi_{12}=\frac{1}{2}h\left[k(h,0)f(0)+k(h,h)\phi_{11}\right]+f(h)$；

$\phi_{11}=hk(h,0)f(0)+f(h)$。

$$\phi(2h)=\frac{h}{3}\left[k(2h,0)f(0)+4k(2h,h)+\phi(h)+k(2h,2h)\phi_{21}\right]+f(2h)$$

式中 $\phi_{21}=2hk(2h,h)\phi(h)+f(2h)$。

$$\phi(3h)=\frac{3}{8}h\left[k(3h,0)f(0)+3k(3h,h)\phi(h)+3k(2h,2h)\phi(2h)+k(3h,3h)\phi_{31}\right]+f(3h)$$

式中 $\phi_{31}=\frac{3}{2}h\left[k(3h,h)\phi(h)+k(3h,2h)\phi(2h)\right]+f(3h)$。

戴依方法与复化辛普森求积公式的联合使用，可改善求解的精度，但是由于复化辛普森求积公式适用于奇数个等距节点，所以对偶数个节点的情况，可改用$\frac{3}{8}$辛普森求积公式。

例 4 在区间[0,2]上使用节点距 $h=0.1$ 的辛普森求积公式和$\frac{3}{8}$辛普森求积公式，求积分方程

$$\phi(x)=\int_0^x\frac{1}{5}xt\phi(t)\mathrm{d}t+x,(x>0)$$

的近似解。**解**：$h=0.1$，$k(x,t)=\frac{1}{5}xt$，依据戴依方法得

$$\phi_{11}=0.1$$

$$\phi_{12}=0.1+0.05\left[0+\frac{1}{5}(0.1)^3\right]\approx 0.10001$$

$$\phi_{13}=0.05+0.025\left[0+\frac{1}{5}(0.05)^2\times(0+0.05)\right]\approx 0.05$$

$$\phi(h)=\phi(0.1)=0.1+\frac{1}{6}(0.1)\left[0+4\times\frac{1}{5}\times 0.1\times 0.05\times 0.05+\frac{1}{5}\times 0.1\times 0.1\times 0.10001\right]$$

$$=0.10001$$

利用辛普森公式计算，有

$$\phi(2h)=\phi(0.2)=0.20011$$

再用$\frac{3}{8}$辛普森公式计算，有

$$\phi(3h)=\phi(0.3)=0.30054$$

在这个求解过程中，$\phi(0.4)$，$\phi(0.6)$，…，$\phi(2.0)$是用辛普森公式计算，而$\phi(0.5)$，$\phi(0.7)$，…，$\phi(1.9)$则是用$\frac{3}{8}$辛普森公式进行计算的。

表 7.5-1 列出了积分方程的精确解，以及用复化梯形公式和辛普森公式计算的数值解，从中可以看出，采用辛普森公式比复化梯形公式要精确得多。

表 7.5-1 积分方程数值解与精确解比较

x_k	精确解	复化梯形	辛普森
0.0	0.00000	0.00000	0.00000
0.1	0.10001	0.10001	0.10001
0.2	0.20011	0.20012	0.20011
0.3	0.30054	0.30057	0.30054
0.6	0.60870	0.60883	0.60870
0.9	0.94482	0.94514	0.94482
0.2	1.34652	1.34720	1.34652
1.5	1.87849	1.87993	1.87849
1.8	2.65538	2.65582	2.65538
1.9	3.00152	3.00564	3.00154
2.0	3.40921	3.41463	3.40922

8 第Ⅰ类积分方程的数值方法

8.1 正则化策略与正则解

第Ⅰ类积分方程由于其不适定性，其数值方法与求解第Ⅱ类积分方程的数值方法有很大的不同。求解第Ⅰ类积分方程相对于求解第Ⅱ类积分方程要困难得多。这些困难包括：

（1）当原积分方程准确解不存在时，如何定义合适的广义解？

（2）当原积分方程的解不唯一时，如何加以适当的限制使其解唯一？

（3）当原积分方程有唯一解时，由于逆算子的不连续性，如何保证右端项的微扰不会在数值求解过程中被累积并放大？

设第Ⅰ类积分方程

$$\int_a^b k(x,t)z(t)\mathrm{d}t = u(x) \tag{8.1-1}$$

或写成算子形式

$$\mathbf{A}\varphi = f \tag{8.1-2}$$

一般的，设 $\varphi \in F$，$f \in U$，空间 F 与空间 U 的度量为 ρ_F 和 ρ_U。$\mathbf{A}: F \to U$ 是线性或非线性映射，但这里我们仅考虑线性映射的情况。$D(A)$ 和 $R(A)$ 分别表示算子 $\mathbf{A}$ 的定义域和值域。当算子 $\mathbf{A}$ 非满射，即 $R(A) \neq U$ 时，积分方程解可能不存在；当算子 $\mathbf{A}$ 为非单射时，即算子 $\mathbf{A}$ 的零空间 $N(A) = \{z \mid \mathbf{A}z = 0\}$ 非空，积分方程的解不唯一；若积分方程的解存在且唯一，但逆算子 $\mathbf{A}^{-1}$ 无界或不连续，则积分方程的解不具有稳定性。由此可见，积分方程是否适定，不仅与解 $z(t)$ 所属的函数空间 F，右端项 $u(t)$ 所属函数空间 U 有关，更重要的是与算子 $\mathbf{A}$ 的性质有关。

积分方程的物理背景可以是各种各样的，但通常右端项与测量数据有关系，积分核则由具体的物理系统决定。这样，从解决实际问题来说，我们希望积分方程的解是适定的。但不幸的是，实际测量数据不可避免的带有测量误差，通常我们知道的只是积分方程右端项 $u(t)$ 的近似值，即 $u_\delta(t)$。由于 $u_\delta(t)$ 可能不属于 U，此时，积分方程的解就很可能不存在了。即使积分方程的解存在且唯一，若逆算子 $\mathbf{A}^{-1}$ 无界或不连续，也不能使积分方程的解满足稳定性要求。可见，对第Ⅰ类积分方程，不适定性是普遍存在的问题。为此，必须考虑这样的问题，即怎样使一个不适定的问题成为一个适定的问题，或更准确地说，如何构造一个适定的问题，使这个适定问题的解可以成为那个不适定问题解的一个合理近似。如果这种想法可以实现，我们就可以绕过求解一个不适定问题可能遇到的重重困难。这种求解不适定问题的策略通常称之为正则化策略。它是由 Tikhonov 和 Phillips 分别独立提出的[33,36]。下面我们就具体讨论这种正则化策略。

首先，为了克服由于测量误差的引入造成积分方程解的不存在，定义满足下列条件

$$\min \rho_u^2(\mathbf{A}z, u_\delta) \tag{8.1-3}$$

的解 z_δ 为积分方程的广义解（又称拟解）。广义解总是存在的，但却可能是不唯一的。为此，我们对广义解的函数空间

$$Q_\delta=\{z;\rho(\mathbf{A}z,u_\delta)\leqslant\delta\} \tag{8.1-4}$$

加以限制，缩小集合 Q_δ 的范围，希望在子集 $F_1\subset F$ 上积分方程的解是唯一的。这需要利用关于解的补充信息（定性的或定量的），如解的存在范围，解的性质等。正则化策略主要利用解的定性性质，即关于解的光滑性。

设 W_2^p 是具有直到 p 阶连续导数的函数空间（即索勃列夫空间），W_2^p 的度量按照下式定义

$$\rho_W(z_1,z_2)=\left\{\int_a^b\sum_{r=0}^{p}q_r(x)\left(\frac{\mathrm{d}^rz(x)}{\mathrm{d}x^r}\right)^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}},\quad(z=z_1-z_2) \tag{8.1-5}$$

其中，$q_0(x),q_1(x),\cdots,q_p(x)$ 是给定的非负连续函数。关于解的光滑性要求就是要求

$$\min:\Omega[z]=\int_a^b\sum_{r=0}^{p}q_r(x)\left(\frac{\mathrm{d}^rz(x)}{\mathrm{d}x^r}\right)^2\mathrm{d}x \tag{8.1-6}$$

虽然满足式(8.1-3)的广义解是不唯一的，但如果同时要求解满足式(8.1-6)，则解被限制成唯一的。为此，构造泛函

$$M^\alpha[z,u_\delta]=\rho_u^2(\mathbf{A}z,u_\delta)+\alpha\Omega[z] \tag{8.1-7}$$

其中，$\alpha>0$ 称为正则系数。求该泛函的极小值

$$\min:M^\alpha[z,u_\delta]=\rho_u^2(\mathbf{A}z,u_\delta)+\alpha\Omega[z] \tag{8.1-8}$$

并将其解 $z_\delta(x)$ 作为原积分方程的近似解。这就是求解不适定的第Ⅰ类积分方程的正则化策略。通常称泛函 $M^\alpha[z,u_\delta]$ 为展平泛函(Smoothing functional)，称 $\Omega[z]$ 为稳定泛函(Stabilization functional)或稳定子。当 $p=0$ 时，

$$\Omega[z]=\int_a^b z^2(x)\mathrm{d}x \tag{8.1-9}$$

称为 0 阶稳定子。当 $p=1$ 时，

$$\Omega[z]=\int_a^b[(z(x))^2+(z'(x))^2]\mathrm{d}x \tag{8.1-10}$$

称为一阶稳定子。

展平泛函的极小值解 $z_\delta(x)$ 也可以看成是某个算子 $\mathbf{R}(u_\delta,\alpha)$（它依赖于数据 u_δ 和正则参数 α）作用于 u_δ 的结果，即

$$z_\delta=\mathbf{R}(u_\delta,\alpha) \tag{8.1-11}$$

这时称 $\mathbf{R}(u_\delta,\alpha)$ 为正则算子，称 z_δ 为原积分方程的正则解。由于正则算子 $\mathbf{R}(u_\delta,\alpha)$ 依赖于正则参数 α，因而，积分方程的正则解也依赖于正则参数 α。那么正则参数 α 应该如何选择呢？

正则参数 α 的选择对用正则化方法求解第Ⅰ类积分方程是至关重要的一步。因而一直是极具吸引力的研究课题。从逼近原积分方程准确解的角度出发，希望 α 尽可能小；而从保证解的稳定性角度出发，又希望正则参数 α 尽可能大。它们是相互矛盾的，通常只能在二者之间取得某种意义上的折中，使得正则参数的选取，既能保证解的稳定性，又能使逼近解足够接近准确解。通常，正则参数的选择有所谓的先验(prior)和后验(posterior)两类策略。前者在求出正则解之前就将正则参数确定下来。由于正则解和准确解之间的误差明显的与正则参数的选择有关，这就导致了最优正则参数的问题，即使解的误差极小化的对应正则参

数选择问题。而确定正则参数的后验策略，则是在计算正则解的过程中，根据一定的原则不断调整正则参数 α 的值，保证解的误差水平与原始数据的误差水平相匹配。由于后验策略相对更简单，更实用，因而也更得到关注。这里介绍使用最为广泛的一种后验策略，即偏差原理(Discrepancy principle)。偏差原理要求解的误差 $\rho_u(\mathbf{A}z_\alpha, u_\delta)$ 与数据的误差 δ 是相等的。即正则参数 α 应由下列 Morozov 偏差方程确定

$$\rho_u(\mathbf{A}z_\alpha, u_\delta) = \delta \tag{8.1-12}$$

上述方程是非线性的，一般可以采用 Newton 迭代法确定正则参数 α 的值。当数据的误差水平 δ 未知时，可以利用 Engl 的误差极小化准则(Engl's criterion)来确定正则参数 α，即

$$\min : Q(\alpha) = \frac{\| \mathbf{A}z_\alpha^\delta - u_\delta \|}{\sqrt{\alpha}} \tag{8.1-13}$$

现在，可以将求解不适定的第Ⅰ类积分方程的正则化策略总结如下：

(1) 定义广义解满足 $\min : \rho_u(\mathbf{A}z, u_\delta)$，解决解的不存在问题。

(2) 构造稳定泛函 $\Omega(z)$，通过补充解的定性信息，消除解的非唯一性。

(3) 构造展平泛函

$$M^\alpha[z, u_\delta] = \rho_u^2(\mathbf{A}z, u_\delta) + \alpha\Omega[z] \tag{8.1-14}$$

并对给定正则参数的初值 α 极小化泛函 $M^\alpha(z, u_\delta)$ 得正则解

$$z_\delta^\alpha = \mathbf{R}(u_\delta, \alpha_0) \tag{8.1-15}$$

(4) 根据偏差方程(8.1-12)确定新的正则参数 α。再利用新的正则参数 α 确定新的正则解 $z_\delta^\alpha = \mathbf{R}(u_\delta, \alpha)$。反复迭代，直至解的误差水平等于数据的误差水平 δ。

8.2 连续正则化方法

利用上节讨论的正则化方法求解不适定的第Ⅰ类积分方程数值解时，需要对积分区间进行离散，从而将一个无限维问题转化为一个有限维问题进行数值求解。通常有两种做法：(1)先正则化，再离散化；(2)先离散化，再正则化。前者通常被称作连续正则化方法，后者通常被称作离散正则化方法。本节讨论连续化正则化方法。

考虑第Ⅰ类积分方程(8.1-1)或算子形式(8.1-2)。假设积分核 $k(x,t)$ 在区间 $\Pi = [a,b]\times[a,b]$ 上连续，$F = W_2(a,b)$，$U = L^2[a,b]$，算子 $\mathbf{A}$ 是映射 F 到 U 的全连续算子。设 $z_T(t)$ 是方程相应于右端项 $u_T(x)$ 的准确解，即

$$\mathbf{A}z_T = u_T \tag{8.2-1}$$

通常 $u_T(x)$ 是不知道的，只知道具有误差水平 δ 的近似 u_δ：$\| u_\delta - u_T \| \leqslant \delta$。由于问题的不适定性，传统的借助于逆算子 $\mathbf{A}^{-1}$ 来确定近似解的方法不具有稳定性，为此，采用正则化方法来求解。

首先，构造展平泛函(又称 Tikhonov 泛函)

$$M^\alpha[z, \alpha] = \rho_u^2(\mathbf{A}z, u_\delta) + \alpha\Omega[z] \tag{8.2-2}$$

式中

$$\rho_u^2(\mathbf{A}z, u_\delta) = \| \mathbf{A}z - u_\delta \|^2 = \int_a^b \left[\int_a^b k(x,t)z(t)\mathrm{d}t - u_\delta(x)\right]^2 \mathrm{d}x \tag{8.2-3}$$

而稳定泛函 $\Omega(z)$ 的选取，依对解的光滑性要求不同，而有不同的取法。当仅要求解本身在区间 (a,b) 连续时，可取零阶稳定子

$$\Omega[z]=\|z(t)\|^2=\int_a^b z^2(t)\mathrm{d}t \tag{8.2-4}$$

当不仅要求解本身在区间(a,b)连续，还要求其一阶导函数连续时，可取一阶稳定子

$$\Omega[z]=\|z(t)\|^2+\|z'(t)\|^2=\int_a^b[(z(t))^2+(z'(t))^2]\mathrm{d}t \tag{8.2-5}$$

如果进一步还要求二阶导函数连续，可取二阶稳定子

$$\Omega[z]=\|z(t)\|^2+\|z'(t)\|^2+\|z''(t)\|^2=\int_a^b[(z(t))^2+(z'(t))^2+(z''(t))^2]\mathrm{d}t \tag{8.2-6}$$

这里，以一阶稳定子为例进行说明。

其次，对展平泛函求一次变分，并使之等于0，得到使展平泛函极小化的Euler方程。

$$\delta M^\alpha=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}M^\alpha[z+\eta h,u_\delta]|_{\eta=0}=0 \tag{8.2-7}$$

式中，h为容许函数，而η为实参数。因为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}M^\alpha[z+\eta h,u_\delta]&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\int_a^b\left[\int_a^b k(x,t)[z(t)+\eta h(t)]\mathrm{d}t-u_\delta(x)\right]^2\mathrm{d}x+\\&\quad\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\int_a^b\{[z(t)+\eta h(t)]^2+[z'(t)+\eta h'(t)]^2\}\mathrm{d}t\\&=2\int_a^b\left[\int_a^b k(x,t)[z(t)+\eta h(t)]\mathrm{d}t-u_\delta(x)\right]\int_a^b k(x,t)h(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\\&\quad 2\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\int_a^b\{[z(t)+\eta h(t)]h(t)+[z'(t)+\eta h'(t)]h'(t)\}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{8.2-8}$$

所以

$$\begin{aligned}\delta M^\alpha[z,u_\delta]&=2\int_a^b\left\{\left[\int_a^b k(x,t)z(t)\mathrm{d}t-u_\delta(x)\right]\int_a^b k(x,t)h(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x+\\&\quad 2\alpha\int_a^b[z(t)h(t)+z'(t)h'(t)]\mathrm{d}t\\&=2\int_a^b\left[\int_a^b\int_a^b k(x,t)k(x,s)z(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right]h(s)\mathrm{d}s-2\int_a^b\left[\int_a^b k(x,s)u_\delta(x)\mathrm{d}x\right]h(s)\mathrm{d}s+\\&\quad 2\alpha\int_a^b z(s)h(s)\mathrm{d}s+2\alpha z'(t)h(t)\Big|_a^b-2\alpha\int_a^b z''(s)h(s)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{8.2-9}$$

考虑到$h(s)$的任意性，则式(8.2-7)等价于下列微分-积分方程

$$\int_a^b\int_a^b k(x,t)k(x,s)z(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\alpha[z(s)-z''(s)]=\int_a^b k(x,s)u_\delta(x)\mathrm{d}x \tag{8.2-10a}$$

及附加边界条件

$$z'(b)h(b)-z'(a)h(a)=0 \tag{8.2-10b}$$

边界条件可视实际情况决定。若已知解在区间端点的函数值，即

$$z(a)=\bar{z}_1,\ z(b)=\bar{z}_2$$

式中，$\bar{z}_1$和$\bar{z}_2$是给定值。在这种情况下，函数$h(s)$（实为变分）应该在端点$s=a$和$s=b$为0，从而边界条件(8.2-10)是满足的。

如果在端点$s=a$和$s=b$上，解$z(s)$的值是不知道的，可假定

$$z'(a)=z'(b)=0$$

从而满足边界条件(8.2-10b)。

也可能存在满足(8.2-10b)的混合型边界条件，即

$$z(a)=\bar{z}_1,\quad z'(a)=0$$

$$z(b)=\bar{z}_2,\quad z'(b)=0$$

类似的，对0阶稳定子 $\Omega[z]=\|z(t)\|^2$ 可导出

$$\int_a^b\int_a^b k(x,t)k(x,s)z(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\alpha z(s)=\int_a^b k(x,s)u_\delta(x)\mathrm{d}x \tag{8.2-11}$$

令

$$\hat{k}(s,t)=\int_a^b k(x,s)k(x,t)\mathrm{d}x$$

$$g(s)=\int_a^b k(x,s)u_\delta(x)\mathrm{d}x$$

则式(8.2-10a)和式(8.2-11)可分别简写为

$$\int_a^b \hat{k}(s,t)z(t)\mathrm{d}t+\alpha[z(s)-z''(s)]=g(s) \tag{8.2-12}$$

$$\int_a^b \hat{k}(s,t)z(t)\mathrm{d}t+\alpha z(s)=g(s) \tag{8.2-13}$$

它们就是对应泛函极小值的欧拉条件，更一般的，当积分核是复变函数，欧拉方程可写成

$$A^*Az+\alpha(z-z'')=A^*u_\delta \tag{8.2-14}$$

$$A^*Az+\alpha z=A^*u_\delta \tag{8.2-15}$$

或更一般的，

$$A^*Az+\alpha\Omega'[z]=A^*u_\delta \tag{8.2-16}$$

式中，A^* 是 A 的共轭算子，$\Omega'[z]$是泛函 $\Omega[z]$的导数。

如果在构造稳定展平泛函时，使用了 p 阶稳定子

$$\Omega[z]=\int_a^b\sum_{r=0}^{p}q_r(x)\left(\frac{\mathrm{d}^r z}{\mathrm{d}x^r}\right)^2\mathrm{d}x \tag{8.2-17}$$

则泛函 $M^\alpha[z,u]$的欧拉方程将有下列形式

$$\int_a^b \hat{k}(s,t)z(t)\mathrm{d}t+\alpha\sum_{r=0}^{p}(-1)^r\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}s^r}\left[q_r(s)\frac{\mathrm{d}^r z}{\mathrm{d}s^r}\right]=b(s) \tag{8.2-18}$$

而边界条件可取为

$$z(a)=z'(a)=\cdots=z^{(p-1)}(a)=0 \tag{8.2-19a}$$

$$z(b)=z'(b)=\cdots=z^{(p-1)}(b)=0 \tag{8.2-19b}$$

通过差分离散，Euler 方程可用差分法进行数值求解。为此，建立差分网格

$$s_i=a+(i-0.5)h,(i=1,2,\cdots,n) \tag{8.2-20}$$

$$h=\frac{b-a}{n} \tag{8.2-21}$$

以式(8.2-12)为例，进行差分离散化之后得

$$\sum_{j=1}^{n}h\hat{k}_{ij}z_j-\alpha\left[(z_{i-1}-2z_i+z_{i+1})/h^2-z_i\right]=g_i,(i=1,2,\cdots,n) \tag{8.2-22}$$

式中 $\hat{k}_{ij}=\hat{k}(s_i,t_j)=\int_a^b k(x,s_i)k(x,t_j)\mathrm{d}x$；

$$g_i = \int_a^b k(x, s_i) u_\delta(x) \mathrm{d}x。$$

而边界条件

$$z'(a) = 0$$

$$z'(b) = 0$$

差分离散化之后为

$$\frac{z_1 - z_0}{h} = 0$$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{h} = 0$$

由于稳定泛函的引入，式(8.2-22)对应的线性代数方程组的系数矩阵，对任意 $\alpha>0$ 都是良态的，可用常规求解线性方程组的方法求解。若正则参数 α 已根据先验准则确定下来，只需要解一次方程组即可，但结果通常不太理想；若正则参数是根据后验准则进行确定，则需要一个反复迭代过程，不断调整正则参数的取值，直到解的误差与数据的误差水平相匹配时停止迭代。解的结果通常会因反复迭代有较大的改善，这是付出计算成本换来的。

8.3 离散正则化方法

将连续问题离散化并求数值解，实质上是将无限维问题用有限维问题近似，并用有限维空间上的解作为原问题的近似解。离散化有多种方式，但它们可用投影法统一起来。为此，我们首先给出投影法的定义。

定义 8.3-1 设 F 和 U 是两个 Banach 空间，$\mathbf{A}: F \to U$ 为有界双射算子。令 $F_n \subset F, U_n \subset U$ 是 n 维的有限维子空间；$\mathbf{Q}_n: U \to U_n$ 为投影算子。对于给定的 $u \in U$，关于算子方程

$$\mathbf{A}z = u, (z \in F, u \in U) \tag{8.3-1}$$

的投影法就是要在 F_n 中求解下述投影近似方程

$$\mathbf{Q}_n \mathbf{A} z_n = \mathbf{Q}_n u \tag{8.3-2}$$

设 $\{\hat{z}_1, \hat{z}_2, \cdots, \hat{z}_n\}$ 和 $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \cdots, \hat{u}_n\}$ 分别是 F_n 和 U_n 的基，并设

$$z_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \hat{z}_i \tag{8.3-3}$$

$$\mathbf{Q}_n u = \sum_{i=1}^n \beta_i \hat{u}_i \tag{8.3-4}$$

$$\mathbf{Q}_n \mathbf{A} \hat{z}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \hat{u}_i \tag{8.3-5}$$

则投影近似方程(8.3-2)等价于下述线性代数方程组

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j = \beta_i, (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{8.3-6}$$

或写成矩阵形式

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \tag{8.3-7}$$

根据 $F_n, U_n, \mathbf{Q}_n$ 的不同选取可得不同的投影方法：

(1) 配点法

设 $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，将区间$[a,b]$离散化，并称离散点为配置点。$U_n$ 是由插值基函数 $\hat{u}_j(x)$ 所张成的 n 维子空间。这里投影算子 $\mathbf{Q}_n$ 就是插值算子：

$$\mathbf{Q}_n u = \sum_{j=1}^{n} u(x_j)\hat{u}_j(x) \tag{8.3-8}$$

此时，投影近似方程为

$$\mathbf{A}z_n(x_i) = u(x_i),(i=1,2,\cdots,n) \tag{8.3-9}$$

而与投影近似方程对应的线性代数方程组中

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = ((\mathbf{A}\hat{z}_j)(x_i)) \tag{8.3-10a}$$

$$\beta_i = u(x_i) \tag{8.3-10b}$$

(2) Galerkin 法

在 Galerkin 法中，准确解 $z \in F$ 用其在子空间 F_n 中的正交投影 $z_n = \mathbf{Q}_n z \in F_n$ 来近似。因此，z_n 需满足正交投影条件

$$z_n - z \perp F_n, \forall z \in F \tag{8.3-11}$$

或等价的

$$\mathbf{A}z_n - u \perp U_n, \forall u \in U \tag{8.3-12}$$

也可用内积表示为

$$(\mathbf{A}z_n - u, u_n) = 0, \forall u_n \in U_n \tag{8.3-13}$$

或

$$(\mathbf{A}z_n, u_n) = (u, u_n), \forall u_n \in U_n \tag{8.3-14}$$

式(8.3-14)就是 Galerkin 法的投影近似方程，而与之对应的线性代数方程组中

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = ((\mathbf{A}\hat{z}_j, \hat{u}_i)) \tag{8.3-15a}$$

$$\beta_i = (u, \hat{u}_i) \tag{8.3-15b}$$

(3) 最小二乘法

最小二乘法的投影近似方程为

$$\| \mathbf{A}z_n - u \| \leqslant \| \mathbf{A}v_n - u \|, \forall v_n \in F_n$$

即

$$\| \mathbf{A}z_n - u \| = \min \| Av_n - u \|, \forall v_n \in F_n$$

由一次变分为 0 可导出确定解的法方程如下

$$(\mathbf{A}z_n, \mathbf{A}v_n) = (u, \mathbf{A}v_n), \forall v_n \in F_n$$

容易看出，若 $U_n = \mathbf{A}(F_n)$，则上式就是式(8.3-14)，因此，最小二乘法可以看成是 Galerkin 法取 $U_n = \mathbf{A}(F_n)$ 的特例。

相应的线性代数方程组中

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = ((\mathbf{A}\hat{z}_j, \mathbf{A}\hat{z}_i)) \tag{8.3-16a}$$

$$\beta_i = (u, \mathbf{A}\hat{z}_i) \tag{8.3-16b}$$

在算子方程(8.3-1)就是第Ⅰ类积分方程

$$(\mathbf{A}z)(x) = \int_a^b k(x,s)z(s)\mathrm{d}s = u(x) \tag{8.3-17}$$

时，由各种投影方程得到的线性代数方程组中的系数矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 和右端项 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_i)$ 还可以具体表示为

配点法：

$$a_{ij} = \int_a^b k(x_i,s)\hat{z}_j(s)\mathrm{d}s \tag{8.3-18a}$$

$$\beta_i = u(x_i) \tag{8.3-18b}$$

Galerkin 法：

$$a_{ij} = \int_a^b\int_a^b k(x,s)\hat{z}_j(s)\hat{u}_i(x)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \tag{8.3-19a}$$

$$\beta_i = \int_b^a u(x)\hat{u}_i(x)\mathrm{d}x \tag{8.3-19b}$$

最小二乘法：

$$a_{ij} = \int_a^b\int_a^b k(s,x)k(x,s)\hat{z}_j(s)\hat{z}_i(x)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \tag{8.3-20a}$$

$$\beta_i = \int_a^b\int_a^b k(x,s)\hat{z}_i(s)u(x)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \tag{8.3-20b}$$

现在，我们来讨论一下，通过上述的各种投影方法得到的线性代数方程组的性质。如前所述，方程组的右端项往往含有测量误差，即 $\boldsymbol{\beta}$ 实际为 $\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta}$，相应的解变为 $\boldsymbol{\alpha}+\Delta\boldsymbol{\alpha}$，经过简单推导可得

$$\frac{\|\Delta\boldsymbol{\alpha}\|}{\|\boldsymbol{\alpha}\|} \leqslant \|\boldsymbol{A}\| \; \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \frac{\|\Delta\boldsymbol{\beta}\|}{\|\boldsymbol{\beta}\|} \tag{8.3-21}$$

可见线性代数方程组解的相对误差与右端项的扰动误差之间的关系可以由 $\|\boldsymbol{A}\| \; \|\boldsymbol{A}^{-1}\|$ 来确定。它的大小反映右端项扰动误差在求解过程中是被抑制缩小还是被扩散放大。从而刻画了方程组在求解方面的性态。通常称之为线性代数方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数(condition number)，记作 cond($\boldsymbol{A}$)。当条件数较小时，称方程组是良态的(well-conditioned)；当条件数较大时，称方程组是病态的(ill-conditioned)。条件数越大，方程组越病态。

条件数与所取矩阵范数有关，当使用谱范数时，有

$$\mathrm{cond}(A) = \|\boldsymbol{A}\|_2 \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})}} = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}} \tag{8.3-22}$$

式中，$\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$和 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$是 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 的最大和最小特征值。$\mu_{\max}$和 $\mu_{\min}$是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大和最小奇异值。

当 $\boldsymbol{A}$ 对称时，

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) = \frac{|\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})|}{|\lambda_{\min}(\boldsymbol{A})|} \tag{8.3-23}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 正定时，

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) = \frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{A})} \tag{8.3-24}$$

不幸的是，对于第Ⅰ类积分方程，通过各种投影方法得到的线性代数方程组都是病态的，并且积分核 $k(x,t)$越光滑，方程组的病态越严重。随着网格的细化，方程组的条件数会先有所下降，但随后随网格的细化变得更大。对于病态的线性代数方程组，不能用常规的求解方法，必须用特殊的线性代数方程组求解方法。比较传统的方法是奇异值分解方法。它的基本思想是：首先对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行奇异值分解

$$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{S} = \mathrm{diag}(u_1, u_2, \cdots, u_r, 0, 0, \cdots, 0) \tag{8.3-25}$$

式中，$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 都是正交矩阵，$\boldsymbol{S}$ 为对角矩阵，称为奇异值矩阵，$u_i(i=1,2,\cdots,r)$是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值，并满足

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant \cdots \geqslant u_r \geqslant 0 \tag{8.3-26}$$

$r=\mathrm{Rank}(\boldsymbol{A})$是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩。

其次，取

$$\tilde{\boldsymbol{S}}=\mathrm{diag}(u_1,u_2,\cdots,u_p,0,0,\cdots,0) \tag{8.3-27}$$

式中，$p<r$。

计算

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{U}\tilde{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{V}^T \tag{8.3-28}$$

式中，$\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 是在范数意义下最接近 $\boldsymbol{A}$ 的近似矩阵，即对任意矩阵 $\boldsymbol{B}$

$$\|\boldsymbol{A}-\widetilde{\boldsymbol{A}}\|_2=\min\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|_2 \tag{8.3-29}$$

最后，求解近似方程组

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{8.3-30}$$

取代求解原病态方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{8.3-31}$$

由于 $u_p>u_r$，所以

$$\mathrm{cond}(\widetilde{\boldsymbol{A}})=\frac{u_1}{u_p}<\frac{u_1}{u_r}=\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) \tag{8.3-32}$$

即矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的条件数相对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数下降了。

奇异值分解方法的主要问题是计算成本太大。现在我们开始介绍求病态方程组的正则化方法。构造离散的 Tikhonov 正则泛函

$$M_h^\alpha[\boldsymbol{x}^h,\boldsymbol{b}^h]=\rho_u^2(\boldsymbol{A}_h\boldsymbol{x}^h,\boldsymbol{b}^h)+\alpha\boldsymbol{\Omega}_h \tag{8.3-33}$$

式中，$\boldsymbol{x}^h$ 为解向量，$\boldsymbol{b}^h$ 为数据向量，$\boldsymbol{A}_h$ 是方程组的系数矩阵，$\boldsymbol{\Omega}_h$ 为稳定矩阵，α 为正则参数。

根据

$$\frac{dM_h^\alpha}{dx_i^h}=0,(i=1,2,\cdots,n) \tag{8.3-34}$$

得与

$$\min M_h^\alpha[\boldsymbol{x}^h,\boldsymbol{b}^h] \tag{8.3-35}$$

等价的欧拉方程

$$(\boldsymbol{A}_h^T\boldsymbol{A}_h+\alpha\boldsymbol{\Omega}_h)\boldsymbol{x}^h=\boldsymbol{A}_h^T\boldsymbol{b}^h \tag{8.3-36}$$

式中，与 $\Omega(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}(t)\|^2$ 对应的稳定矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_h$ 为单位矩阵，而与

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x}(t))=\|\boldsymbol{x}(t)\|^2+\|\bar{\boldsymbol{x}}'(t)\|^2$$

对应的稳定矩阵为

$$\boldsymbol{\Omega}_h=h\begin{pmatrix}1+\frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & & & \\ -\frac{1}{h^2} & 1+\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & & \\ & -\frac{1}{h^2} & 1+\frac{2}{h^2} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1+\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ & & & & -\frac{1}{h^2} & 1+\frac{1}{h^2}\end{pmatrix} \tag{8.3-37}$$

式中，$h=\frac{b-a}{n}$为离散网格的大小。

由于稳定矩阵$\boldsymbol{\Omega}$的引入，方程组(8.3-36)是良态的，可用常规线性方程组求解方法进行求解。正则参数若采用先验原则确定，则方程组(8.3-36)的求解无需迭代；正则参数若采用后验原则确定，则方程组(8.3-36)的求解需反复迭代，在求解过程中不断调整正则参数α值，直至解的误差水平与数据的误差水平相匹配。离散的偏差方程可写成

$$\Delta(\alpha)=\|\boldsymbol{A}_h\boldsymbol{x}_\alpha^h-\boldsymbol{u}_\delta^h\|^2-\delta^2=0 \tag{8.3-38}$$

对离散正则化方法可总结如下：

(1) 通过离散化(各种投影方法)将积分方程化成有限维的线性代数方程

$$\boldsymbol{A}_h\boldsymbol{x}^h=\boldsymbol{b}^h$$

(2) 对病态线性方程组进行正则化，得到 Euler 方程

$$(\boldsymbol{A}_h^T\boldsymbol{A}_h+\alpha\boldsymbol{\Omega}_h)\boldsymbol{x}^h=\boldsymbol{A}_h^T\boldsymbol{b}^h$$

(3) 给定初值α_0，求解 Euler 方程得$\boldsymbol{x}^h$。

(4) 根据式(8.3-38)计算$\Delta(\alpha_k)$，若$|\Delta(\alpha_k)|<\varepsilon$(给定计算精度)，停止迭代。

(5) 根据式(8.3-38)计算$\Delta'(\alpha_k)$，并按下列 Neuton 迭代格式调整正则参数α的值

$$\alpha_{k+1}=\alpha_k-\frac{\Delta(\alpha_k)}{\Delta'(\alpha_k)},(k=1,2,\cdots)$$

(6) 反复迭代，直至满足迭代终止条件$|\Delta(\alpha_k)|<\varepsilon$。

8.4 滤波正则化方法

讨论如下卷积型积分方程

$$k(t)*z(t)=u(t) \tag{8.4-1}$$

式中，$k(t)$和$u(t)$是给定函数，$z(t)$是待求未知函数。$z\in F,u\in U,F$和U是度量空间，式中卷积具有如下 3 种表示形式：

(1)
$$k(t)*z(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}k(t-\tau)z(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.4-2}$$

(2)
$$k(t)*z(t)=\int_0^{\infty}k(t-\tau)z(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.4-3}$$

(3)
$$k(t)*z(t)=\int_0^{\infty}k\left(\frac{t}{\tau}\right)z(\tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \tag{8.4-4}$$

针对如上 3 种形式，可分别采用傅里叶变换，拉普拉斯变换和梅林变化，它们可统一地表示成

$$F[k(t)*z(t)]=\bar{k}(\omega)\bar{z}(\omega) \tag{8.4-5}$$

式中，$\bar{k}(\omega)$表示$k(t)$的傅里叶变换，或拉普拉斯变换，或梅林变化；$\bar{z}(\omega)$具有类似的意义。

在变化域内，积分方程的解可表示为

$$\bar{z}(\omega)=\frac{\bar{u}(\omega)}{\bar{k}(\omega)} \tag{8.4-6}$$

式中，$\bar{u}(\omega)$是$u(t)$的傅里叶变换，或拉普拉斯变换，或梅林变化。由于数据误差的存在，我们实际知道的只是$u(t)$的近似值，即

$$\tilde{u}(t)=u(t)+e(t) \tag{8.4-7}$$

式中，$e(t)$是随机误差。式(8.4-5)应改写成

$$\bar{z}(\omega)=\frac{\bar{u}(\omega)}{\bar{k}(\omega)}+\frac{\bar{e}(\omega)}{\bar{k}(\omega)}$$

$$=\bar{z}_T(\omega)+\frac{\bar{e}(\omega)}{\bar{k}(\omega)} \tag{8.4-8}$$

按理，只需对式(8.4-8)作相应的逆变换，就可以得到原积分方程的近似解。不幸的是由于随机误差 $e(\omega)$的高频 ω 的影响，可能导致$\frac{\bar{e}(\omega)}{\bar{k}(\omega)}$的逆变换不存在，即与逆变换相应的积分是发散的[35]。

如对傅里叶变换，由于 $\bar{e}(\omega)$的高度振荡导致狄利克雷条件不满足，或由于 $\bar{k}(\omega)$与 $\bar{e}(\omega)$在 $\omega\to\infty$时趋于零的速度不一致，导致绝对可积条件不成立。其次，既使$\frac{\bar{e}(\omega)}{\bar{k}(\omega)}$的逆变换存在，则它与零的偏差可以任意大，从而关于解的真实信息被噪声所遮盖，导致所得到的近似解是不可靠的。总之，当数据的误差或噪声较大时，逆变换的数值反演是一个不适定问题。为了消除或减少 $\bar{e}(\omega)$的高频 ω 成分对逆变换稳定性的影响，就需要对高频 ω 成分进行滤波处理。引入双变量函数 $f(\omega,\alpha)$，用对 $f(\omega,\alpha)\bar{u}(\omega)$的逆变换来代替直接对 $\bar{u}(\omega)$作逆变换求得积分方程的近似解，即

$$z_\alpha(t)=F^{-1}[f(\omega,\alpha)\bar{u}(\omega)]=R(\bar{u}(\omega),\alpha) \tag{8.4-9}$$

例如，对傅里叶变换而言，有

$$z_\alpha(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\omega,\alpha)}{\bar{k}(\omega)}\bar{u}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{8.4-10}$$

可以证明，当 $f(\omega,\alpha)$满足条件：

(1) $f(\omega,\alpha)$是在($\alpha\geqslant0,-\infty<\omega<\infty$)域内有定义的偶函数，且 $f(\omega,\alpha)\in L^2(-\infty,+\infty)$；

(2) 对所有 $\alpha\geqslant0$ 值和 ω 值，有 $0\leqslant f(\omega,\alpha)\leqslant1$；

(3) 当 $\alpha\to0$ 时，$f(\omega,\alpha)$单调趋于 1；

(4) 当 $\omega\to\pm\infty$时，$f(\omega,\alpha)\to0$；

(5) 对所有 $\alpha>0$，有$\frac{f(\omega,\alpha)}{\bar{k}(\omega)}\in L^2(-\infty,+\infty)$，

$f(\omega,\alpha)\frac{\bar{u}(\omega)}{\bar{k}(\omega)}$的逆变换是存在的。这里不加证明地给出下述定理。

定理 8.4-1 如果函数 $f(\omega,\alpha)$满足条件(1)～(5)，则借助于它确定的算子 $\mathbf{R}(u,x)$(见式 8.4-10)是算子方程

$$\mathbf{A}z\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}k(t-\tau)z(\tau)\mathrm{d}\tau=u(t) \tag{8.4-11}$$

的对 $u(t)$连续的正则算子。

上述定理的证明较复杂，有兴趣的读者可参考文献 6。

这里，借助于 $f(\omega,\alpha)$的引入得到了原积分方程的稳定近似解，称 $f(\omega,\alpha)$为稳定因子，而称算子 $\mathbf{R}(u,x)$为滤波正则算子，在滤波正则化(Filtering regularization)方法中，关键的一步是构造稳定因子 $f(\omega,\alpha)$，一般地可按下式构造稳定因子：

$$f(\omega,\alpha)=\frac{L(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)} \tag{8.4-12}$$

式中，$L(\omega)=\bar{k}(\omega)\bar{k}(-\omega)=|\bar{k}(\omega)|^2$，而对 $M(\omega)$ 有如下要求：

(1) $M(\omega)$ 是偶函数，并在任一有限区间内是分段连续的；

(2) $M(\omega)$ 是 ω 的非负函数，即 $M(\omega)\geqslant 0$；

(3) 对充分大的 $|\omega|$ 来说，$M(\omega)\geqslant c>0$；

(4) 对任意 $\alpha>0$，有 $\dfrac{k(-\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)}\in L^2(-\infty,+\infty)$。

考虑到

$$\rho^2(Az_\alpha,u)=\int_{-\infty}^{\infty}[\mathbf{A}z_\alpha-u(t)]^2\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\bar{k}(\omega)\bar{z}(\omega)-\bar{u}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega=\Phi(\alpha) \tag{8.4-13}$$

当取

$$\Omega[z]=\int_{-\infty}^{+\infty}M(\omega)|z(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{8.4-14}$$

时，Tikhonov 泛函

$$M^\alpha[z,u]=\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathbf{A}z-u)^2\mathrm{d}t+\alpha\Omega[z] \tag{8.4-15}$$

极小化对应的 Euler 方程为

$$z_\alpha(\omega)=\frac{\bar{k}(-\omega)\bar{u}(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)} \tag{8.4-16}$$

即

$$z_\alpha(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}z_\alpha(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{k}(-\omega)\bar{u}(\omega)}{L(\omega)+\alpha M(\omega)}\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\omega,\alpha)}{\bar{k}(\omega)}\bar{u}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{8.4-17}$$

由此可见，在滤波正则化方法中按式(8.4-12)构造的稳定因子 $f(\omega,\alpha)$，等价于在 Tikhonov 泛函中稳定泛函 $\Omega[z]$ 取式(8.4-14)的形式。这种等价关系反映了滤波正则化方法与由变分法导出的正则化方法之间的联系。

现在讨论 $M(\omega)$ 的取法，首先考虑 $M(\omega)=1$ 的情况。此时，

$$\Omega[z]=\int_{-\infty}^{+\infty}|z(\omega)|^2\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}|z(t)|^2\mathrm{d}t \tag{8.4-18}$$

可见，$M(\omega)=1$ 对应于 0 阶稳定子。当 $M(\omega)=\omega^{2r}$ 时，

$$\Omega[z]=B\int_{-\infty}^{+\infty}|z^{(r)}(t)|^2\mathrm{d}t \tag{8.4-19}$$

式中，$z^{(r)}(t)=\dfrac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-r)}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{m-r}\frac{\mathrm{d}^{m+1}z}{\mathrm{d}\tau^{m+1}}\mathrm{d}\tau$。这里，$B$ 是正常数，m 是不小于数 r 的整数部分的整数。

一般地，可取

$$M(\omega)=\sum_{k=1}^{p}q_k\omega^{2k} \tag{8.4-20}$$

式中，q_k 是非负常数，它相应于 p 阶稳定子 $\Omega[z]$。

现在讨论正则参数 α 的取值。由滤波正则化方法得到的积分方程近似解 $z_\alpha(t)$ 的误差为

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha)=\rho^2(\mathbf{A}z_\alpha-u)&=\int_{-\infty}^{+\infty}[\mathbf{A}z_\alpha(t)-u(t)]^2\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\bar{k}(\omega)\bar{z}_\alpha(\omega)-\bar{u}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha^2M^2(\omega)|\bar{u}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega}{[L(\omega)+\alpha M(\omega)]^2}\end{aligned}\tag{8.4-21}$$

当 $\alpha=0$ 时，显然有

$$\Phi(0)=0\tag{8.4-22}$$

当 $\alpha>0$ 时，

$$\Phi(\alpha)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\bar{u}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega=\|u(t)\|^2\tag{8.4-23}$$

并且，当 $\alpha\to\infty$ 时，

$$\Phi(\alpha)\to\|u(t)\|^2\tag{8.4-24}$$

此外

$$\Phi'(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha L(\omega)M^2(\omega)|\bar{u}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega}{[L(\omega)+\alpha M(\omega)]^3}>0\tag{8.4-25}$$

这样，滤波正则解的误差是 α 的单调增函数，由零变到 $\|u(t)\|$。当原积分方程右端项误差水平 δ 满足

$$\delta<\|u_\delta(t)\|\tag{8.4-26}$$

时，可由偏差方程

$$\Phi(\alpha)=\delta^2\tag{8.4-27}$$

确定唯一的正则参数 $\bar{\alpha}$。

上述讨论是针对卷积型积分方程进行的。事实上，滤波正则化方法也适用于非卷积型的第Ⅰ类积分方程

$$\int_a^b k(x,t)z(t)\mathrm{d}t=u(x)\tag{8.4-28}$$

写成算子形式

$$\mathbf{A}z=u\tag{8.4-29}$$

令 $\{\varphi_i(t),\psi_i(t)\}$ 是与特征值 λ_i 对应的特征函数对。用特征函数展开法可得上述积分方程的解为

$$z(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\psi_k(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(u,\varphi_k)}{\lambda_k}\psi_k(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{\lambda_k}\psi_k(t)\tag{8.4-30}$$

为了消除数据误差中的高频成分对解的稳定性的影响，一种简单的滤波正则化方法，是取近似解为

$$Z_\delta(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{u_k}{\lambda_k}\psi_k(t)\tag{8.4-31}$$

式中，m 是有限值。

若从算子方程

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{A}+\alpha\mathbf{I})z=\mathbf{A}^*u \tag{8.4-32}$$

出发，用特征函数展开法可得积分方程的解为

$$z(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\psi_k(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k u_k}{\lambda_k^2+\alpha}\psi_k(t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(\alpha)\frac{u_k}{\lambda_k}\psi_k(t) \tag{8.4-33}$$

式中，$f_k(\alpha)=\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2+\alpha}$就是所谓的滤波因子，而式(8.4-31)可看成是滤波因子取下式的特殊情况

$$f_k(\alpha)=\begin{cases}1, k\leqslant m\\0, k>m\end{cases}$$

滤波因子也可以选取其他形式，一般应根据具体问题选择适合的滤波因子，以达到最佳的滤波效果。既达到抑制高频误差的影响，又不失去有用的高频信息。

当滤波因子取下式形式

$$f_k(\alpha)=\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2+\alpha}$$

时，可见$\alpha\to 0$时，$f_k(\alpha)\to 1$；$\alpha\to\infty$时，$f_k(\alpha)\to 0$。因而从更好地逼近解的角度看，α应取很小的值，但从消除高频误差的影响出发，α又应该取较大值。这样，我们只能取一个折中值。对于含随机误差的数据

$$u_\delta(x)=u(x)+e(x)$$

积分方程的近似解为

$$z_\delta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k u_k}{\lambda_k^2+\alpha}\psi_k(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k\delta u_k}{\lambda_k^2+\alpha}\psi_k(t)$$

式中，$\delta u_k=(e(x),\varphi_k(x))$，考虑到

$$\max_{\lambda}\frac{\lambda}{\lambda^2+\alpha}=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

为保证高频误差不会被放大，应有

$$\frac{\lambda_k\|\delta u_k\|}{\lambda_k^2+\alpha}<1$$

从而正则参数的最小取值应满足

$$\alpha>\frac{1}{4}\|\delta u_k\|^2$$

8.5 迭代正则化方法

用迭代方法求解第Ⅰ类算子方程会出现所谓的“半收敛”(semi-convergence)现象，即在迭代的早期阶段，近似解可稳定地得到改进，表现出“自正则化”的效应，而迭代次数超过某一阈值后，便趋于发散，因而关键问题是要寻找一个合适的终止原则(stoping rule)，使得迭代次数与原始数据的误差水平相匹配。在迭代法中，迭代指数(iteration index)，即迭代步数起到了正则化参数的作用，而终止准则正对应着正则参数的某种选择方法[4,5]。

考虑算子方程

$$\mathbf{A}x=y \tag{8.5-1}$$

由式(8.5-1)可得

$$x = x + \mathbf{A}^* (y - \mathbf{A}x) \tag{8.5-2}$$

式中,$\mathbf{A}^*$ 为 $\mathbf{A}$ 的共轭算子,因此,考虑构造如下形式的迭代格式

$$x_k = x_{k-1} + \mathbf{A}^* (y - \mathbf{A}x_{k-1}) \tag{8.5-3}$$

由于收敛性的考虑,一般要求 $\| \mathbf{A}^* \| < 1$,此时,可引入参数 ω,将迭代格式(8.5-3)改写成

$$x_k = x_{k-1} + \omega\mathbf{A}^* (y - \mathbf{A}x_{k-1}) \tag{8.5-4}$$

式中,参数 ω 称为松弛因子,满足条件 $0 < \omega \leqslant \frac{1}{\| \mathbf{A} \|^2}$,这就是著名的 Landweber 迭代格式[28]。

对于含误差的右端项,设误差水平为 δ: $\| y - y_\delta \| \leqslant \delta$,这时,Landweber 迭代格式为

$$x_k^\delta = x_{k-1}^\delta + \omega\mathbf{A}^* (y_\delta - \mathbf{A}x_{k-1}^\delta) \tag{8.5-5}$$

设算子方程的真解是 x^+,称 $x^+ - x_k$ 为逼近误差,而称 $x_k - x_k^\delta$ 为数据误差,则迭代误差 $x^+ - x_k^\delta$ 满足

$$\| x^+ - x_k^\delta \| \leqslant \| x^+ - x_k \| + \| x_k - x_k^\delta \| \tag{8.5-6}$$

对于逼近误差,当 $k \to \infty$ 时,有 $\| x^+ - x_k \| \to 0$;而对迭代误差,有 $\| x_k - x_k^\delta \| \leqslant \sqrt{k\omega}\delta$,可见,当误差水平 δ 较小时,对于较小的 k,数据误差 $\| x_k - x_k^\delta \| \leqslant \sqrt{k\omega}\delta \leqslant 1$ 可以忽略不计,于是可以认为 Landweber 方法是收敛的,但当 k 比较大时,从而 $\sqrt{k}\delta$ 达到与逼近误差相同的量级,数据误差的影响就逐渐显现出来,以至于整体误差变得越来越大。这就是所谓的半收敛现象(semi-convergence)。可见,这里迭代指数 k 发挥了正则参数的作用。假设 δ 已知,这里给出一个根据偏差原则来决定合适迭代指数 k 的准则。即,选择迭代指数 $k = k(\delta, y_\delta)$,使迭代过程中第 1 次出现

$$\| Ax_k^\delta - y_\delta \| \leqslant \tau\delta, (\tau > 1 \text{ 为固定常数}) \tag{8.5-7}$$

时终止迭代。有研究表明,$\tau = 2$ 是 Landweber 算法是否收敛的分水岭,故在迭代准则判别式(8.5-7)中通常取 $\tau = 2$[4]。

实践表明,Landweber 迭代序列收敛速度不大,收敛过程相当慢。为了克服这个困难,可考虑加速 Landweber 迭代方法。多项式加速迭代方法是最常用的一种方法,其主要思想是:每一步迭代不仅仅利用上一步得到的信息,而且充分利用前面各步所得到的信息。

记

$$r_{k-1} = \mathbf{A}^* (y - \mathbf{A}x_{k-1}) \tag{8.5-8}$$

多项式加速迭代方法的点列如下产生:

$$x_k = \mu_{1k}x_{k-1} + \mu_{2k}x_{k-2} + \cdots + \mu_{kk}x_0 + \omega_k r_{k-1}, (k = 1, 2, \cdots) \tag{8.5-9a}$$

$$\mu_{1k} + \mu_{2k} + \cdots + \mu_{kk} = 1, (\omega_k \neq 0) \tag{8.5-9b}$$

由此可见,Landweber 迭代格式是多项式加速迭代格式,当

$$\omega_k = \omega$$

$$\mu_{2k} = \cdots = \mu_{kk} = 0$$

时的一种特例。

计算实践表明,仅仅利用前面两步的信息,即 x_{k-1}, x_{k-2},就可构造出相当有效的迭代算法,这就是通常所说的半迭代法,其迭代点列按下式产生:

$$x_k = x_{k-1} + u_k (x_{k-1} - x_{k-2}) + \omega_k\mathbf{A}^* (y - Ax_{k-1}) \tag{8.5-10}$$

式中，u_k 和 ω_k 分别取为

$$u_1 = 0$$

$$\omega_1 = \frac{4v+2}{4v+1}$$

$$u_k = \frac{(k-1)(2k-3)(2k+2v-1)}{(k+2v-1)(2k+4v-1)(2k+2v-3)}$$

$$\omega_k = \frac{4(2k+2v-1)(k+v-1)}{(k+2v-1)(2k+4v-1)}$$

式中，v 为预先给定的计算参数（$v>0$）。

按照 Tikhonov 的正则化策略，可用近似解

$$x_\delta^\alpha = (\mathbf{A}^* \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^* y, \tag{8.5-11}$$

作为精确解 x^+ 的近似。如果正则参数 $\alpha = \alpha(\delta)$ 具有某种先验性质，比如：

$$\lim_{\delta \to 0} \alpha(\delta) = 0$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} = 0$$

则有

$$\lim_{\delta \to 0} \| x_\delta^{\alpha(\delta)} - x^+ \| = 0$$

事实上，近似解 x_δ^α 也可以用下面的迭代方法求解，通常称为迭代 Tikhonov 正则化方法。

$$\begin{cases} x_{\alpha,\delta}^0 = 0 \\ (\mathbf{A}^* \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}) x_{\alpha,\delta}^k = \mathbf{A}^* y_\delta + \alpha x_{\alpha,\delta}^{k-1}, (k = 1, 2, \cdots) \end{cases} \tag{8.5-12}$$

在实际计算中，更常采用下面的形式

$$\begin{cases} z_{\alpha,\delta}^0 = 0 \\ (\mathbf{A}^* \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}) x_{\alpha,\delta}^k = y_\delta + \alpha z_{\alpha,\delta}^{k-1} \\ x_{\alpha,\delta}^k = \mathbf{A}^* z_{\alpha,\delta}^k \end{cases} \tag{8.5-13}$$

而正则参数 $\alpha(\delta)$ 通常可按 Morozov 偏差原则决定，即

$$\| \mathbf{A} x_{\alpha,\delta} - y_\delta \|^2 = \delta^2 \tag{8.5-14}$$

参 考 文 献

1 陈传璋,侯宗义,李明忠. 积分方程理论及其应用. 上海:上海科学技术出版社,1997
2 张石生. 积分方程. 重庆:重庆出版社,1988
3 沈以淡. 积分方程. 北京:北京理工大学出版社,2002
4 肖庭延,于慎根,王彦飞. 反问题的数值解法. 北京:科学出版社,2003
5 刘继军. 不适定问题的正则化方法及应用. 北京:科学出版社,2005
6 吉洪诺夫,阿尔先宁. 不适定问题解法. 王秉忱译. 北京:地质出版社,1979
7 黄光远,刘小军. 数学物理反问题. 济南:山东科技出版社,1993
8 沈永欢,梁在中,许履瑚,蔡倩倩. 实用数学手册. 北京:科学出版社,1999
9 程其襄,张奠宙,魏国强等. 实变函数与泛函分析基础. 北京:高等教育出版社,2004
10 马振华主编. 现代应用数学手册:现代应用分析卷. 北京:清华大学出版社,1998
11 马振华主编. 现代应用数学手册:计算与数值分析卷. 北京:清华大学出版社,2005
12 沈乃录. 积分方程. 银川:宁夏人民出版社,1997
13 姚家宁. 积分方程. 重庆:重庆大学出版社,1986
14 杨德全. 边界元理论及应用. 北京:北京理工大学出版社,2002
15 杜庆华. 边界积分方程方法——边界元法. 北京:高等教育出版社,1989
16 云天铨. 积分方程及其在力学中的应用. 广州:华南理工大学出版社,1990
17 路见可,钟寿国. 积分方程论. 北京:高等教育出版社,1990
18 Moiseiwitsch B. L., Integral equations, Dover Publications INC, NewYork, 2005
19 Piplein A. C., A Course on integral equations, Springer - Verlag, NewYork, 1991
20 Delves L. M., Walsh J., Numerical solution of integral equations, Clarendon Press, Oxford, 1977
21 Christopher T. H., Baker M. A., The numerical treatment of integral equations, Cambridge University Press, Cambridge, 1985
22 Davis P. J., Rabinowitz P., Methods of numerical integration, Academic Press, NewYork, 1984
23 Engl H. W., Hanke M., Neubauer A., Regularization of inverse problems. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996
24 Groetsch C. W., The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of first kind, Pitman Advanced Publishing Program, London, 1984
25 Groetsch C. W., Inverse problems in the mathematics sciences, Vieweg, Braunschweig, 1993
26 Kirsch A., An introduction to the mathematical theory of inverse problems, Springer - Verlag, NewYork, 1996
27 Kress R., Linear integral equation, Springer - Verlag, NewYork, 1989
28 Landweber L., An iteration formula for Fredholm integral equations of first kind, Amer. J. Math., 1951, 73:615~624
29 Morozov V. A., Methods for solving incorrectly posed problems. Springer - Verlag, NewYork, 1984
30 Nakamura G., Inverse problems and related topic, Chapman & Hall, London, 2000
31 Plato R., Vainikko G., On the regularization of projection methods for solving ill - posed problems. Numer. Math., 1990, 57:63~79
32 Ramlan R., A Modified Landweber method for inverse problem. Numer. Funct. Anal. Optimiz., 1999, 20:79~98
33 Tikhonov A. N., Leonov A. S., Yagola A. G., Nonlear ill - posed problems. Chapman & Hall, London, 1998
34 de Hoog, F. R., Review of Fredholm equations of first kind, in: Application and numerical solution of integral equations. Sijthoff and Noordhoff, 1980, 119~134
35 Phillips D. L., A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind. J. Assoc. Comp. Mach., 1962, 9:84~96